

橢圓柱形光源取樣與成像技巧

Sampling and Rendering Techniques for an Elliptical Cylinder Luminary

李孟燦
M. T. Lee

張忠賢
C. S. Chang
圖學、多媒體暨虛擬實境實驗室
國立中興大學資訊科學研究所
台中市 402 南區國光路 250 號

王宗銘
C. M. Wang

holylight@cs.nchu.edu.tw cschang@cs.nchu.edu.tw cmwang@cs.nchu.edu.tw

摘要

蒙地卡羅法是電腦圖學的領域中經常被使用來求解全域照度的有效方法之一。該方法的一個重要課題是如何有效的對不同種類的光源選取隨機樣本，以便於利用這些樣本來計算光源對物體的照度影響。橢圓柱形光源是一個常見且重要的光源型態，然而，文獻上尚未發現有關橢圓柱形光源的取樣與成圖技巧之論述。本篇論文據此提出橢圓柱形光源的均勻密度取樣技巧。此外，本文也說明取樣後的成圖技巧。我們將提出之方法實現在一個全域照度成圖系統。我們對標準測試模型分別使用「光線追蹤演算法」與「蒙地卡羅直接照明演算法」蒐集測試之結果。針對後者，我們更分析取樣的數量對圖像品質之衝擊與影響。我們所提的技巧擴大了光源涵蓋之領域，並可實際應用在全域照度的取樣與成圖計算。

關鍵詞：橢圓柱形光源、蒙地卡羅法、均勻密度取樣法。

Abstract

Monte Carlo methods have been a popular approach adopted in the computer graphics community. Efficient sampling for different types of luminaries is an important issue in solving the global illumination problem using Monte Carlo methods. To our knowledge, neither sampling nor rendering techniques for the elliptical cylinder luminary have ever been presented in the literature. In this paper, we initially describe the sampling technique before we demonstrate rendering technique using both ray tracing and Monte Carlo direct lighting algorithm. The proposed techniques are implemented on an experimental system where some images are rendered and runtime statistics collected. We also analyze how the quantities of samples impact on the quality of rendered images. The contribution of this paper is to extend the luminary coverage both in the sampling and rendering aspects with an application in the global illumination.

Key words: elliptical cylinder luminary, Monte Carlo direct lighting, stratified sampling, uniform density sampling.

一、前言

電腦圖學界(Computer Graphics)所追求的重要目標之一為產生高解析度、擬似照片般真實的圖像(Photo-realistic images)，而研究此課題的相關技術也被泛稱為「全域照度」(Global Illumination)領域[3, 2]。上述目標的完成首先必須藉由成圖方程式(Rendering Equation)來模擬光線在場景中的傳輸過程(Light Transport)及光線與場景物體的反射過程(Light Reflection)[4, 3]。其後，利用有效的演算法來求解成圖方程式，以便產生最後的圖像。由於這些演算法均是值基於物理特性所發展的，故也被稱為「以物理特性為基礎的成圖演算法」(Physically-based rendering algorithms)，而所產生的圖像也就具有有滲色(Color Bleeding)、平滑陰影(Soft Shadows)、散焦亮點(Caustic Bright Spots)、相互反射(Inter-reflection)等效果[3, 2]。

成圖方程式是利用積分方程式(Integral Equation)來描述場景中某個物體表面上的某點(Point)、在特定方向(Direction)上所散發出來的照度能量(Radiance)[4]。這些照度能量是以下兩種能量的加總；其一為該點發射的「直接照度能量」，在此情況下，該點可能為光源上之一點；其二為該點發射的「間接照度能量」，此係由其他物體對該點投射照度能量後，由該點反射在此特定方向上的照度能量。

由於成圖方程式藉由上述的積分方程式的表示方法，故能模擬光線的傳輸過程及光線的反射過程。全域照度領域中，成圖方程式相當複雜，最多可達八個維度的積分；包括波長(Wavelength)、像素(Pixel)、相機透鏡(Lens)、時間(Time)、光源(Luminary)[4]。其中，僅波長與時間為一個維度的積分，其餘均為兩個維度。高維度的積分方程式通常都太過於複雜無

法而求解，因此，大部分的研究學者都將成圖方程式做適度的簡化[5, 10, 14, 19]，以便能有效地計算結果。這些簡化會使成圖方程式無法表示某些現象，例如光的偏極化(Polarization)[16]、干涉(Interference)、繞射(Diffraction)[12]。簡化後的成圖方程式一般僅表現出幾何光學(Geometric Optics)的特性，無法顯示出波動光學(Wave Optics)的特性。

即使經過適度的簡化，成圖方程式至少仍有兩個維度，以致於使用分析方法求解仍有其困難。電腦圖學界學者乃轉而利用蒙地卡羅法(Monte Carlo Methods)來求解成圖方程式。蒙地卡羅法的主要精神乃是源自於機率與統計[8, 11]。對於解複雜的積分問題，蒙地卡羅法利用隨機取樣來簡化積分式，亦即藉由隨機變數(random variables)的期望值表示此積分式的解。蒙地卡羅法對於高維度積分式的求解十分有效。使用該法在電腦圖學領域的應用包括分散型光線追蹤(Distribution Ray Tracing)[14]、蒙地卡羅直接照明法(Monte Carlo Direct Lighting)[9]、蒙地卡羅路徑追蹤(Monte Carlo Path Tracing)[4]，以及蒙地卡羅路雙向路徑追蹤法(Bi-Directional Path Tracing)[13]。

蒙地卡羅直接照明法是全域照度成圖演算法中經常被使用的演算法[9]。究其原因有二；其一為平滑陰影之考量。該法僅考慮光源對物體的直接照度影響，亦即本演算法考慮光線由光源發射後，僅經過一次反射，即到達影像平面的像素點。由於僅考慮一次反射，故該法無法模擬出滲色、散焦亮點、相互反射等效果。然而，由於使用非點光源，故該法可以有有效的模擬出平滑陰影，其陰影的視覺效果就此點而言，優於傳統的光線追蹤法。使用蒙地卡羅直接照明法的第二個原因為該法的計算複雜度小於其他全域照度演算法，這也是肇因於該法僅考慮一次反射的計算量而已。因此，使用蒙地卡羅直接照明法，成圖時間可以縮短許多。

蒙地卡羅法直接照明法的主要研究議題在於如何在光源上選擇一個適當的機率密度函數(Probability Density Function, PDF)，並利用這個函數來產生隨機樣本。隨後以成圖方程式為基礎，計算這些選取的樣本點對整體能量照度的平均貢獻。顯然的，這些隨機樣本必須在成圖方程式中積分範圍內；此外，適當的機率密度函數及隨機樣本數量，將會影響產生的圖像其雜訊(noise)之程度。

先前研究學者對光源之取樣已獲至若干之成果，詳見第二節文獻回顧之說明。然而，就吾人所知，文獻上尚未發現關於橢圓柱形光源的取樣與成圖技巧之論述。由於橢圓柱形光源是一個常見且重要的光源型態，因此，本篇論文據此提出橢圓柱形光源的分層均勻密度

取樣技巧(Stratified Uniform Distribution Techniques)。

橢圓柱光源與圓柱光源(Cylindrical Luminary)的幾何形狀類似，但前者的取點技術卻更複雜。此乃由於圓柱光源的取點在由積分式計算完圓柱光源的周圍長度後，可以經由反函數的技巧求得均勻隨機點；然而，橢圓柱光源雖能由積分式表示其周圍長度，但由於反導數(Anti-derivative)無法求得，故必須使用數值方法來求解。如進一步要求能產生均勻的隨機點，則數值方法將會更顯複雜。因此，對於橢圓柱光源的均勻取樣遠比圓柱光源直覺的取樣更具挑戰性，其技巧也更為困難。

本文也說明經由光源面的取樣後，如何使用蒙地卡羅法直接照明演算法來作成圖計算的技巧。我們將提出之方法實現在一個全域照度成圖系統。我們對標準測試模型分別使用「光線追蹤演算法」與「蒙地卡羅直接照明演算法」蒐集測試之結果。針對後者，我們更分析光源面上取樣的數量對產生圖像品質之衝擊與影響。

本篇論文的架構如下：第二節敘述全域照度的背景知識並回顧相關的工作。第三節敘述本文所提的取樣與成圖技巧。我們首先提出橢圓柱的幾何定義，接著推導出橢圓柱光源的分層均勻密度取樣技巧；其後，我們說明成像技巧。第四節敘述並分析我們的測試結果。最後，我們總結本文並提出未來可能之研究方向。

二、相關工作

2.1 背景知識

成圖方程式以場景物體表面上某一點 x 本身所直接放射出的照度能量及 x 所間接反射出來的照度能量來表示 x 所散發出來的照度能量[4]，如式 1 所表示：

$$L(x, \mathbf{y}) = L_e(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \int_{\forall x' \in \Omega_{x'}} g(x, x') \mathbf{r}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') E(x, \mathbf{y}') \cos \mathbf{q} \frac{dA' \cos \mathbf{q}'}{\|x' - x\|^2}$$

(式 1)。其中 x 是物體表面上的點， x' 為光源上所取的樣本點， $g(x, x')$ 是幾何項(geometry term)，當 $g(x, x')$ 為 0 時，表示 x 到 x' 這段路徑上有物體擋住，亦即 x' 相對於 x 而言是不可見的；若為 1 時，則表示 x' 相對於 x 而言是可見的。 $\mathbf{r}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 為 x 點的雙向反射分布函數(Bi-directional Reflectance Distribution Function, BRDF)， \mathbf{y}' 與 \mathbf{y} 分別是光線入射與反射方向， $E(x, \mathbf{y}')$ 表示光線入射方向 \mathbf{y}' 對物體上 x 這點所產生的輻射量(radiance)， \mathbf{q} 為點 x 與物體表面的正交軸夾

角， dA' 是光源上的微小面積， \mathbf{q}' 為點 x 與光源表面的正交軸夾角， $\|x - x'\|$ 代表 x 與 x' 的距離。而且 $dA' \cos \mathbf{q}' / \|x' - x\|^2 = dw'$ ，其中 dw' 是光源投影在以 x 為中心的單位半球面上的實體角。

為了設計合適的機率密度函數，我們針對成圖方程式中的項目做分析，並將之歸類成三個部份[9]：

1. 低變異部份：已知的變數，包括 $r(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ 和 $L_c(x, \mathbf{y})$ ，對影像的訊影響較小。
2. 高變異部份：已知的變數，包括 $\cos \mathbf{q}$ 、 $\cos \mathbf{q}'$ 和 $\|x - x'\|$ ，對影像雜訊影響較大。
3. 未知部份：未知的變數，包括 $g(x, x')$ ，對影像的雜訊只有在取樣後才會得知。

2.2 文獻回顧

在相關文獻中已有一些研究學者提出在光源上的取樣與成圖技術。表 1 列出通用的四種平面光源及三種立體光源的均勻取樣發表年代及參考文獻出處。其中二維光源包括如三角形、矩形、多邊形、圓形等光源；三維光源包含，球形、圓柱形和圓錐形光源等。由表可知尚未有學者提出對於橢圓柱形光源的取樣與成圖技術。橢圓柱形光源較圓柱形光源更具一般性，我們可以藉由參數的控制（長半徑等於短半徑）來產生圓柱形光源。

表 1 不同種類光源取樣相關研究與參考文獻

光源種類	光源型態	參考文獻	年代
平面光源	三角形	[9]	1996
	矩形	[17]	1995
	多邊形	[15]	1993
	圓形	[6]	1993
立體光源	球形	[6]	1993
	圓柱形	[9]	1996
	圓錐形	[6]	1993

直覺上橢圓柱形光源可以使用多邊形逼近而得。然而，此作法有兩點缺失；其一，喪失正確性。逼近表示方法 (Approximation Representation) 與精確表示方法 (Exact Representation) 兩者在某種程度可以相似，但前者畢竟無法完全取代後者。其二，精確度與取樣方法難以求得平衡。這是因為若使用有限的多邊形來逼近橢圓柱光源時，光源的取樣與成圖雖可以簡化成為計算較不複雜的多邊形的模式；然而，光源也因為僅使用有限的多邊形而會產生稜角、稜面，使得橢圓柱光源顯得不平滑。相對的，使用大量的多邊形可有效的逼近橢圓柱光源，但也必須花費大量空間儲存

多邊形的資料，並對這個多邊形光源進行取樣、成圖，此舉無疑將導致效能的降低。因此，我們認為對於橢圓柱光源的取樣與成圖，應由精確表示方法著手，使用逼近表示方法有其無可避免的缺失。

Shirley 等人曾在 1996 年發表對於圓柱光源 (cylindrical luminary) 的取樣方法 [9]。假設圓柱的半徑為 r_c ，圓柱軸向量 \hat{w} ， \hat{u} 與 \hat{v} 為與 \hat{w} 互相垂直的座標軸，則對於圓柱的取點公式可以經由反函數 (Inverse Function) 的技巧表示成為內含隨機變數的函數： $[u \ v \ w]^T = [r_c \cos(2\pi x_1) \ r_c \sin(2\pi x_1) \ x_2 \hat{w}]$ ，其中 x_1 與 x_2 分別為介於 0 與 1 間的隨機變數。因此，只要對於該兩隨機變數在 0 與 1 間先選取等間距，然後在間距內再取隨機變數，即可在相對的圓周上取得均勻的隨機變數。然而，上述方法卻無法是用於橢圓柱光源。這是因為橢圓柱光源的周長無法由反導數求得，故也無法使用直接套用反函數的技巧將取樣點表示成為含隨機變數的函數。因此，Shirley 等人所提的圓柱光源取樣技巧無法適用於橢圓柱光源的取樣；吾人必須對後者的取樣作探討、研究。

三、橢圓柱光源的取樣與成像技巧

本節敘述橢圓柱光源的取樣與成像技巧。我們首先定義一個三度空間的橢圓柱光源，接著我們詳細介紹如何在該光源上選取隨機樣本的取樣技巧。最後，當場景中有橢圓柱光源時，我們說明如何利用光線追蹤與蒙地卡羅直接照明演算法來對場景做擬真的成像。本篇論文假設橢圓柱光源是一個均勻的光源，亦即橢圓柱光源表面上的任一點均向外發射出一定的能量。本篇論文也假設此橢圓柱型光源包含上底與下底，但其上、下底均不對外發射能量。最後，我們也假設場景中僅有一個橢圓柱光源的情況。

3.1 橢圓柱的取樣技巧

1. 橢圓柱的定義

橢圓柱是由一個橢圓加上高度所定義出來的，如圖 1 所示。首先我們必須先決定在三度空間中，橢圓柱所在的位置。我們先給定一個底點 (bottom vertex)，這個點做為整個橢圓柱底面的中心點。同時對於底面的橢圓，給予長軸 (major axis) 與短軸 (minor axis) 的長度以及長軸的向量。有了長短軸的長度便可以決定橢圓的大小，接著再給定長軸的向量，如此便可以確定這個橢圓面的形狀與方向以及在空間的位置。然後我們再給一個頂點 (top vertex)，這個頂點和底點所形成的向量必須垂

直於長軸向量，有了頂點我們就可以決定橢圓柱的高度，如圖所示。

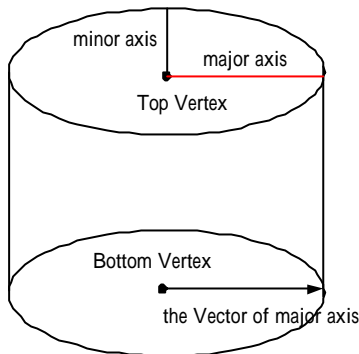


圖 1. 橢圓柱光源的定義

因此一個橢圓柱可以藉由下列五個參數定義：

- 1 頂點座標 $(T_x, T_y, T_z) T \in R$: 最少可以用 3 個浮點數儲存
- 2 底點座標 $(B_x, B_y, B_z) B \in R$: 最少可以用 3 個浮點數儲存
- 3 長軸長度 $a \in R$: 最少可以用 1 個浮點數儲存
- 4 短軸長度 $b \in R$: 最少可以用 1 個浮點數儲存
- 5 長軸向量 $(A_x, A_y, A_z) A \in R$: 最少可以用 3 個浮點數儲存

2. 橢圓柱的均勻密度取樣

我們為了對橢圓柱面上做均勻的等區間 (stratified) 取點，首先必須知道橢圓弧長，以便在每個等長的弧長區間中做隨機亂數取樣。在橢圓邊上做取點後，再加上高度等長區間的取點，我們就可以在橢圓柱面上取點。首先我們使用弧長的參數式積分式：

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

再將橢圓的方程式代入

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b)$$

$$\text{令 } x = a \cos(t) \quad y = b \sin(t)$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt \\ e &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

我們使用辛普森逼近法 (Simpson's approximation) 求出該式子的解，如下：

$$\text{Let } f(t) = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3} (f(a) + 4f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + \\ &\quad \dots + 4f(a + (n-1)\Delta x) + f(b)) \end{aligned}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{其中 } n \text{ 必須為偶數}$$

求得橢圓弧長我們便可以在橢圓柱面上取樣。依下面程序便可求得一樣本點：

$$F(q') = \frac{\int_0^{q'} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt}{P}$$

$0 \leq q' \leq 2\pi$ 其中 P 是橢圓周長。

$$e_1 \in [0,1], e_2 \in [0,1]$$

$$\text{令 } e_1 = \frac{\int_0^{q'} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt}{P}$$

利用數值方法求得 q' ，則該樣本點 $x = (a \cos q', b \sin q', h e_2)$ 。

3. 均勻密度取樣結果

圖 2 是一個以 OpenGL 所描繪出之橢圓柱光源面取點示意圖。此處的橢圓柱光源之長軸、短軸及高度分別為 5、3、3。圖之左測是不同點數下之隨機取樣，而右側則為相對的分層均勻取樣情況。

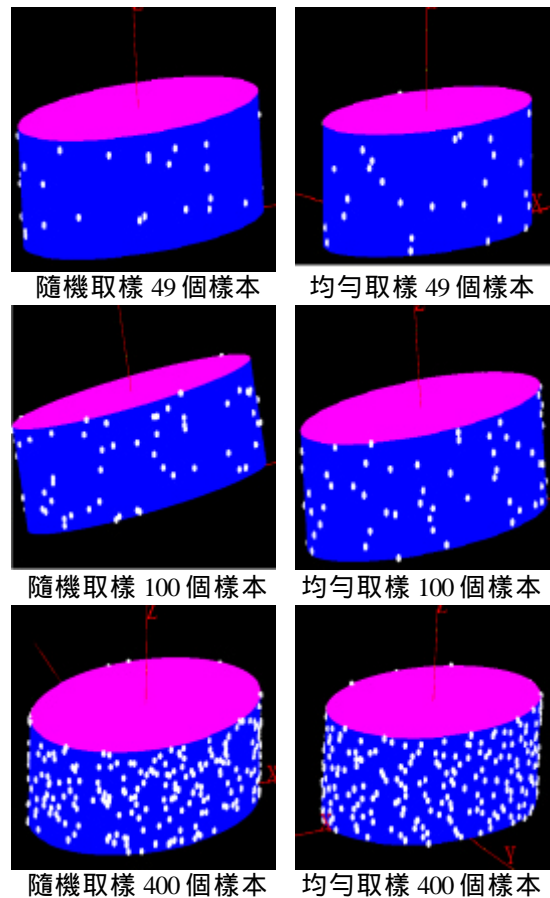


圖 2. 隨機與均勻取樣示意圖

由圖可知：採用隨機時，樣本的分佈極不

平均，甚至可能有兩個樣本幾乎重疊的現象。相較的，採用分層均勻取樣，樣本的分佈相當平均，幾乎沒有兩個樣本重疊的現象，此在取 400 個樣本時尤其明顯。

值得注意的是：在極為極端的情形下，隨機取樣的樣本數可能全部均屬於無效樣本；但在分層均勻取樣時，絕不可能此發生此情況。由於前者可使用的產生之影像具有較小的雜訊，故本文均採用分層均勻取樣的作法。下文以後，除非有區別之必要，否則我們也慣用的將「分層」二字予以省略，故下文以後，「均勻取樣」即代表「分層均勻取樣」之含意。

3.2 橢圓柱的成像技巧

1. 光線與橢圓柱的交點測試

在成圖系統中，必須有物件的交點測試才能將物件成像出來，因此我們需要有橢圓柱物體的交點測試。橢圓柱的交點測試，依照光線 (ray) 的起點可以分成兩種不同的情況。在求交點的程序中，我們假設長軸長度為 a ，短軸長度為 b ，同時將橢圓柱的底面中心點至於區域座標 (local coordinate) 的原點上，長軸設定在 X 軸上，橢圓柱高度為 h 。

a. 光線的起點在於橢圓柱上底之上或是下底之下

首先，先把該射線的參數方程式與橢圓面所在的平面方程式求交點。如果沒有交點，則該射線與橢圓柱則無交點。若有交點，則再由該交點，判斷是否落於橢圓之中，其判別方式為將該點帶入橢圓的參數方程式，若是得到的值小於等於零，則該點落於橢圓面上，該射線與橢圓柱之交點落於上底或下底之橢圓面上。若是落於橢圓面外，則需再將該射線與橢圓柱面求交點。該橢圓柱面的方程式為

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

若是有交點，則該交點即為所求。若無交點，則該射線與橢圓柱則沒有交點。

b. 光線的起點在於橢圓柱上底與下底之間

直接將該射線與橢圓柱面求交點，若是有交點，則該交點即為所求。若無交點，則該射線與橢圓柱則沒有交點。

2. 橢圓柱表面的法向量

為了在成圖系統中讓橢圓柱成像，除了做光線與橢圓柱的交點測試之外，還必須找出交點在橢圓柱上的法向量。假設 (x, y, z) 為橢圓柱上之一點，若該點位於橢圓柱側邊面上，其法向量為

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Nx \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Ny \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Nz$$

$$\text{其中 } f = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \mid 0 < z < h \right\}$$

若該點位於橢圓柱上下底，則該點法向量為橢圓柱上下底之法向量 $(0, 0, \pm z)$ 。

四、結果與分析

本節敘述並分析我們的測試結果。測試時，我們依據所使用成圖演算法之異同，區分成使用「傳統光線追蹤演算法」與使用「蒙地卡羅直接照明演算法」兩種。以下兩小節分別敘述、分析對該兩演算法所測得之數據。我們也將展示數張成圖計算後之圖像。

值得一提的是比較「光線追蹤演算法」與「蒙地卡羅直接照明演算法」之圖像並無實質上之意義。此乃因為前者限定使用點光源，且以相當理想化之方式來敘述光線的傳輸過程；至於後者則支援立體光源，且是基於符合物理特性的成像方程式並利用蒙地卡羅法來求解光線傳輸所產生的照度，故具有全域照度之特性。

4.1 光線追蹤演算法結果

我們以美國史丹福大學發展的公用光線追蹤法系統 Rayshade 為基礎 [7] 來發展我們的應用系統。使用該系統之原因係基於以下兩項考量：其一為正確性驗證：藉著 Rayshade 這套開放原始碼的系統，吾人可以驗證橢圓柱與光線的交點測試的正確性。其二為系統發展考量：由於 Rayshade 本身只支援點光源，無法支援到 direct lighting 的成圖演算法，故我們以傳統、開放原始碼的 Rayshade 為基本架構，將之修改來發展適合用於全域照度成圖演算法的實驗系統。

我們將系統修改成為 Global-Shade 系統，簡稱 GS 系統。GS 系統除了仍能支援使用點光源型態的傳統光線追蹤成圖演算法外，另具有若干我們自行研發、附加的特性：1. 系統支援定義橢圓柱幾何物體；2. 系統支援非點光源的光源型態，這包含表 1 所列出的四種平面光源 (三角、矩型、多邊型、圓形) 與三種立體光源 (球型、圓柱型、圓錐形)；3. 系統支援蒙地卡羅直接照明演算法。

我們接著對 GS 系統作測試定蒐集測試數據。我們所使用的測試環境係個人電腦平台配備 Pentium II 350 MHz 處理器，128 MB 記憶體，並在 Windows 98 作業系統下執行。

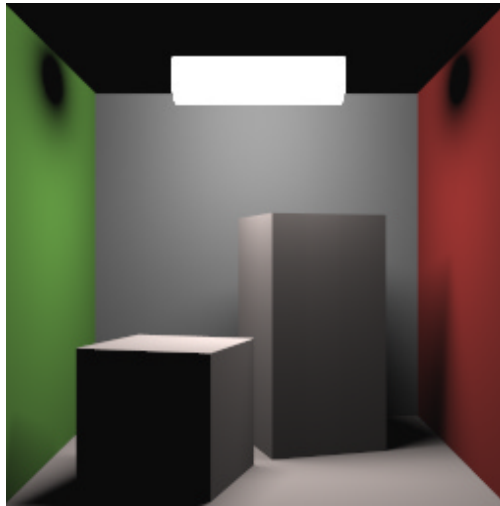


圖 5. 參考影像示意圖。影像大小為 256x256 像素點，每個像素取樣為 100 個樣本，但在橢圓柱光源上取 400 個樣本。

圖 3 與 4 之圖像為以光線追蹤演算法對內含 3 個橢圓柱及 1 個點光源的場景做成圖計算後之結果。此兩張圖像均為 256 x 256 像素點，且未使用任何鋸尺狀消除方法 (anti-aliasing)。由於場景並不複雜，故兩張圖像各別成圖時間約在 90 秒以內。

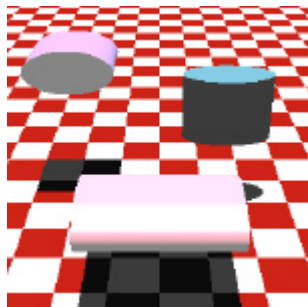


圖 3. 點光源置於橢圓柱物體正上方時之光線追蹤圖像。右側橢圓柱面完全在光源陰影下。

圖 3 係將點光源置於粉紅色橢圓柱之正上方，故此橢圓柱在地板之上陰影呈現邊緣為整齊直線之矩型形狀；此外，上底為天藍色之右方橢圓柱其側面完全處於該點光源之陰影下，故橢圓柱之側面呈現黑色陰影。

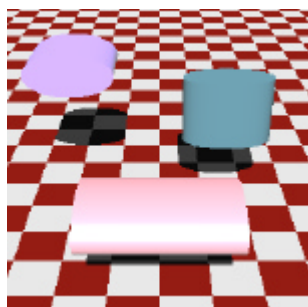


圖 4. 點光源置於橢圓柱物體稍前上方之圖像。橢圓柱物體邊緣行成地板上的弧形陰影。

圖 4 係將點光源置於橫躺大橢圓柱之上方稍前處，故兩個較小橢圓柱均在地板上行成弧形陰影。最後，值得一提的是此兩張圖像顯示了使用光線追蹤法演算法成圖時，物體的陰影呈現典型的具有銳利邊緣的現象，此現象也就是慣稱的「銳利陰影」(Sharp Shadows)。

4.2 蒙地卡羅直接照明演算法結果

我們使用與上一節光線追蹤演算法相同的測試環境來蒐集蒙地卡羅直接照明演算法之數據，以便於兩者互相之比較。蒙地卡羅直接照明演算法除了必須考慮在單一個像素點上的取樣數量外，也必須考慮在光源面上的取樣數量。以下我們使用 $DL-Sample(P, L)$ 來代表使用蒙地卡羅直接照明演算法 (Direct Lighting, DL) 做成圖計算，在單一個像素點 (Pixel) 上取 P 個隨機樣本，且在單一個光源上取 L 個隨機樣本。由於本文著重探討在橢圓柱光源之取樣與成圖，故我們在測試時，僅限定在單一個像素點上僅取 1 個隨機樣本點。我們所採用的模型是由美國康乃爾大學圖學研究小組所發展出來的 Cornell Box，此模型也是在全域照度成圖演算法之中，被當成標準場景的模型。所以我們採用這一種場景模型來測試分析我們的橢圓柱型光源。我們所使用的測試環境係個人電腦平台配備 Pentium II 350 MHz 處理器，128 MB 記憶體，並在 Windows 98 作業系統下執行。

圖 5 為我們所使用的參考影像 (Reference Image)，係在每一個像素上取 100 個樣本，在光源上取 400 個樣本，亦即 $DL-Sample(100, 400)$ 。我們發現：成圖的影像中陰影的部分已經變的柔和，而非原本光線追蹤法具有的銳利陰影。這種現象比較符合真實場景。另外，借助橢圓柱兩側不發光的所產生的陰影，呈現橢

圓形，我們可以看出這是一個橢圓柱光源。而橢圓柱光源由於可以呈現扁平狀，所以較寬的那一側會比較扁的那一側較亮，這是可以被理解的。原因是因為較寬的面積所取的光源樣本數會比較多所導致。

接著我們探討取樣數量對影像品質的影響。在實驗中我們所成的影像圖形大小均為 256x256 個像素，在影像的比較上我們採用 RMS 誤差值做為比較的依據，其計算方式如下：

$$RMS = \sqrt{\sum_{pixels} [\bar{L}_{reference} - \bar{L}_{image}]^2 / N}$$

其中 N 是影像中像素的數目。RMS 是誤差值將影像上每一個像素與參考影像的誤差值做平均，其結果可以用來作為測量蒙地卡羅演算法 (Monte Carlo algorithm) 的變異數，RMS 誤差值反應在影像的雜訊上，越大的 RMS 誤差值表示影像上的雜訊越多，其視覺效果便越差。

我們分別的取樣方式如下：對每個像素點取一個樣本，但分別對光源取均勻樣本數量為 1 個、9 個、49 個、100 個、256 個及 400 個。我們比較成圖時間與 RMS 之值而得實驗的結果，如表 2 所示。

表 2. 取樣數與成圖時間、RMS 之比較

取樣數	成圖時間(秒)	RMS
DL-Sample(1, 1)	35	68.34
DL-Sample(1, 9)	232	26.13
DL-Sample(1, 49)	1208	14.82
DL-Sample(1, 100)	2454	13.42
DL-Sample(1, 256)	6271	12.49
DL-Sample(1, 400)	9782	12.27

由表可以看出：當取樣數為 1 時，均勻密度取樣法的時間為 35 秒。然而隨著取樣數的增加兩者的差距越來越大，當取樣數為 49 點時，均勻密度取樣法成圖時間為 1208 秒。當取樣數為 400 點時成圖時間為 9782 秒。綜觀該表均勻密度取樣法，均勻密度取樣法為了在橢圓柱面上做等間距取點，必須去做數值解，所以比其他有方程式解的光源複雜許多，因此成圖時間也比較長。

就 RMS 之誤差值而言，從表可以看出，當取樣數為 1 時，均勻密度取樣法有最大的 RMS 誤差值：68.34。可以看出當取樣數少的時候，均勻密度取樣法的圖形上雜訊十分的多，而當取樣數增加時到 100 點時均勻密度法的雜訊明顯減少許多。

圖 6. 為不同取樣數之成圖影像。由圖可知在光源上之取樣數愈多，所成圖之雜訊將會相對減少。

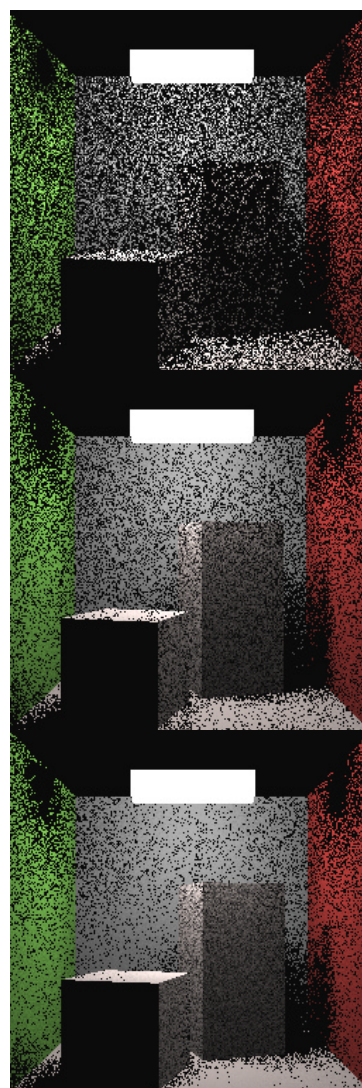


圖 6. 不同取樣數對成圖影像的影響分析。影像大小皆為 256x256；。由上而下之取樣分別為 DL-Sample(1, 1)，DL-Sample(1, 49)，DL-Sample(1, 100)。

五、結論

本篇論文提出一個新的光源型態：橢圓柱型光源。該光源目前為止還沒有論文發表過。所以我們對橢圓柱型光源做了一些研究，其中包括橢圓柱的空間定義與交點測試以及在橢圓柱表面的均勻取樣法。之所以強調均勻取點，是因為均勻取點比隨機取點更有代表性，也有更好的成圖效果。其中值得探討的地方是在於橢圓柱型光源表面要取均勻點必須做數值解。為了求得數值解，我們使用辛普森逼近法 (Simpson's approximation) 求出該式子的數值解。由於均勻取樣法的取點過程中必須做數值解，實作上比有方程式解的光源複雜，因此也花了比較長的成圖時間。

另外我們也發現，對於該數值解，我們並不需要去求得過於精細的數值解就能得到

令人滿意的均勻取點。這是值得注意的部分。因為過於精細的數值解不但會花費太多的時間，而且並不會有明顯的成圖效果。一般而言，我們將辛普森逼近法所需要的分割數定義在 4 到 6 就可以有不錯的表現。

此外，我們亦將橢圓柱型光源導入蒙地卡羅直接照明計算中，並且也得到了一些結果。這些結果也證明了我們光源型態的演算法是正確無誤的。我們也對了這些成圖結果做了一系列的資料分析。由這些資料分析，我們得到了一些有用的資訊。例如：成圖時間與圖像品質並非為線性關係，而是一個二次曲線。還有在一定的取樣數之後，曲線漸漸趨於平緩。這意味在某取點數之後，更多的取點數已經沒辦法增加明顯的成圖品質。

由於新增了一種光源型態，意味著在全域照度的成圖環境底下，我們有了更多的光源選擇，橢圓柱光源具備其他光源沒有的照明特性。橢圓柱光源(ellipse cylinder)視為一種比圓柱(cylinder)更為一般性(generalize)的光源型態，這意味著我們可以用橢圓柱光源來代替圓柱光源。

未來我們打算擴充更多的光源在 GS 成圖系統之中，如環形柱光源等等。此外，也考慮將 solid angle sampling 的技巧一併考慮在光源取點之中 [1]。此外，也可考慮在同一個場景中使用多個光源，並且在多個光源下探討如何以 importance sampling 方式對光源取樣，[19]的論文可以引為借鏡。最後，我們也考慮導入其他的全域照度演算法，例如 Monte Carlo Path Tracing [4]，Bi-directional Path Tracing [13]等。

六、參考文獻

- [1] J. Arvo, "Stratified Sampling of Spherical Triangles," In *ACM SIGGRAPH'95 Proceedings*, pp. 437-438, 1995.
- [2] P. Dutré, K. Bala, P. Bekaert, "Advanced Global Illumination", SIGGRAPH 2001 Course 20, August 12, 2001
- [3] D. P. Greenberg, K. E. Torrance, P. Shirley, J. Arvo, J. A. Ferwerda, S. Pattanaik, E. Lafortune, B. Walter, S.-C. Foo, and B. Trumbore, "A Framework for Realistic Image Synthesis," In *Proceedings of SIGGRAPH 1997*, pp. 477-494, 1997.
- [4] J.T. Kajiya, "The Rendering Equation", In *ACM SIGGRAPH'86 Proceeding*, 20(4), pp.143-150, 1986.
- [5] E. Lafortune, "Mathematical Model and Monte Carlo Algorithm for Physically Based Rendering", Ph.D. Dissertation, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1996.
- [6] S. N. Pattanaik and S.P. Mudur, "Computation of Global Illumination in a Participating Medium by Monte Carlo Simulation," *The Journal of Visualization and Computer Animation*, Vol. 4, No. 3, pp. 133-152, 1993.
- [7] Rayshade URL address: (<http://www-graphics.stanford.edu/~cek/rayshade/rayshade.html>)
- [8] R.Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [9] P. Shirley, C. Wang, and K. Zimmerman, "Monte Carlo Techniques for Direct Lighting Calculation," *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-36, 1996.
- [10] P. Shirley, "Monte Carlo Methods in Rendering", *ACM SIGGRAPH'98 Conference Proceeding*, Course Notes 5, pp. 9-1~9-26, 1998.
- [11] Y.A. Shreider, *The Monte Carlo Method*, Pergamon Press, New York, 1996.
- [12] J. Stam, "Diffraction Shaders," In *ACM SIGGRAPH'98 Conference Proceeding*, pp. 101-110, 1999.
- [13] E. Veach, L. J. Guibas, "Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering," In *ACM SIGGRAPH'95 Proceedings*, pp. 419-428, 1995.
- [14] C. Wang, "Physically Correct Direct Lighting for Distribution Ray Tracing," In *Graphics Gems 3* Academic Press, New York, 1992.
- [15] C. Wang, "The Direct Lighting Computation in Global Illumination Methods," Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Indiana University, November 1993.
- [16] A. Wilkie, R. F. Tobler, and W. Purgathofer, "Combined Rendering of Polarization and Fluorescence Effects," In *Proceedings of Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 196-203, London, 2001.
- [17] K. Zimmerman, "Direct Lighting Models for Ray Tracing with Cylindrical Lamps," In *Graphics Gems V*, Academic Press, New York, 1995.
- [19] K. Zimmerman, "Density Prediction for Importance Sampling in Realistic Image Synthesis," Ph. D. Dissertation, Department of Computer Science, Indiana University, May 1998.