

基於遺傳演算法之模糊分類器的設計

翁慶昌 陳嘉懌 林柏辰

淡江大學電機研究所

台北縣淡水鎮英專路 151 號

wong@ee.tku.edu.t

摘要

本論文提出利用遺傳演算法來設計一模糊分類器，使得所設計的模糊分類器具有較少的模糊規則及較高的分類能力來正確地描述訓練樣本的分類情形。在遺傳演算法上，我們以每個個體來決定前件部的模糊集合，藉此來擷取每一維度重要的模糊集合，並利用訓練樣本來訓練出模糊規則的後件部，進而以模糊規則數及訓練樣本的正確分類個數來評估個體所決定的模糊分類器的好壞，再經由遺傳演算法不斷地疊代以設計出一具較少模糊規則及較高分類能力的模糊分類器。最後以一個二維輸入樣本的分類問題來驗證所提方法的可行性。

關鍵詞：模糊分類，遺傳演算法

1 簡介

模糊系統理論是於 1965 年被提出的一門理論，經過三十幾年來的發展，模糊理論為目前工程應用領域上被廣泛使用的工具。模糊系統理論的精神主要在將有相似輸出的輸入空間歸納出來，並以模糊集合來描述輸入空間，故其可將複雜或不確定的系統利用數個輸入空間的描述予以簡單化，亦即利用數條模糊規則的建立來描述此一複雜或不確定的系統，因此，如何歸納出具有相似輸出性質的輸入空間是建立模糊系統最重要的課題之一。在沒有專家知識與經驗而只有訓練樣本的情況下，欲設計模糊分類器以描述訓練樣本時，要建立幾個模糊規則及要如何分割輸入空間，是整個模糊系統設計中最重要的

一個步驟[1,6,7,8,9]。具有太少模糊規則的模糊系統，在問題的解決能力上會有較差的表現，但是如果太多的模糊規則產生，則會使得系統變得過於複雜，造成資源的浪費。傳統上其選擇常是將每個輸入維度空間做平均分割[4,5]，因此必須先決定將每一個維度分成幾個等份，如此以將整個輸入空間分成數個區域，每一個區域產生一個模糊規則，這種分割方式往往導致產生一些多餘的模糊規則，使得模糊系統產生一些過多的運算。而遺傳演算法能針對傳統模糊系統的設計方式所導致的缺點提供了不錯的解決方法。在遺傳演算法上，我們利用遺傳基因的編碼使得每一個個體可對應出一組輸入空間的分割產生，並依照問題的需求設計適當的適應函數，利用適應函數的引導及複製交配突變等運算子的運算來找出不錯的個體，使其能找出每一維度重要的模糊集合來得到適當的輸入空間分割，然後應用這種觀念來進行模糊分類器之設計。在第二章中，我們介紹 Ishibuchi 所提的模糊分類架構，在第三章探討如何利用遺傳演算法來設計一具較少模糊規則及高分類能力的模糊分類器，在第四章中以一個二維的分類問題來進行模擬驗證。最後在第五章中做個總結。

2 模糊分類器

考慮一個 n 維空間 M 類樣本的分類問題，若所探討的分類問題具有 m 個訓練樣本 $p=1,2,\dots,m$ ，其中 $(x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$ 為第 p 個訓練樣本的輸入向量，而 $y_p \in \{1, 2, \dots, M\}$ 是 $(x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$ 所屬的類別。為了解決此分類問題，我們應用 Ishibuchi 中所提出的模糊規則

的模糊分類方法[4,5]，使得所設計的模糊分類器能正確地敘述此 m 個訓練樣本的分類情形，更進一步應用所產生的模糊規則來分割樣本空間，如此便可產生屬於每一類的區域空間。

針對此 n 維空間 M 類樣本的分類問題，我們定義輸入變數 $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，則模糊分類器的模糊規則可表示為

$$R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}: \\ \text{If } x_1 \text{ is } A_{(1, j_1)} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{(2, j_2)} \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_{(n, j_n)}, \\ \text{then } \bar{x} \text{ belong to Class } y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \text{ with } CF = CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \\ j_i \in \{1, 2, \dots, d_i\} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

其中 d_i 為第 i 維輸入變數 x_i 的模糊集合數， $A_{(i, j_i)}$ 是前件部輸入變數 x_i 的第 j_i 個模糊集合， $y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 是後件部的輸出，為 M 類中的其中一類，其表示 \bar{x} 屬於那一類，而 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 是模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 的可信度。

本論文中，我們定義前件部輸入變數 x_i 的第 j_i 個模糊集合的歸屬函數為

$$A_{(i, j_i)}(c_{(i, j_i)}, w_{(i, j_i)}^l, w_{(i, j_i)}^r; x_i) = \begin{cases} \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_{(i, j_i)}}{w_{(i, j_i)}^l} \right)^2 \right] & \text{if } x_i \leq c_{(i, j_i)} \\ \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_{(i, j_i)}}{w_{(i, j_i)}^r} \right)^2 \right] & \text{if } x_i \geq c_{(i, j_i)} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $c_{(i, j_i)}$ 、 $w_{(i, j_i)}^l$ 及 $w_{(i, j_i)}^r$ 分別是模糊集合 $A_{(i, j_i)}$ 的歸屬函數中心點、函數左邊寬度大小及函數右邊寬度的大小。因此，前件部模糊集合 $A_{(i, j_i)}$ 的歸屬函數外形是由 $(c_{(i, j_i)}, w_{(i, j_i)}^l, w_{(i, j_i)}^r)$ 參數所決定。由於第 i 維輸入變數 x_i 的模糊集合數為 d_i ，因此模糊分類器由 $(d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n)$ 個模糊規則所組成，其集合可定義為

$$S = \{R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \mid j_i \in \{1, 2, \dots, d_i\}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \quad (3)$$

另一方面，我們利用訓練樣本來決定模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 後件部的輸出類別 $y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 及模糊規則的可信度 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ ，其步驟如下：

步驟 1：計算屬於第 T 類的訓練樣本對於模糊規

則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 所分割之樣本空間的歸屬值

$$\beta_{CT}$$

$$\beta_{CT} = \sum_{x_p \in CT} \prod_{i=1}^n A_{(i, j_i)}(x_i), T \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (4)$$

步驟 2：決定模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 的後件部輸出類別。若 $\beta_{CY} = \max\{\beta_{C1}, \beta_{C2}, \dots, \beta_{CM}\}$ ，則 $y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} = Y$ 。

步驟 3：決定模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 的可信度 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$

$$CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} = \frac{(\beta_{CT} - \beta)}{\sum_{T=1}^M \beta_{CT}}, \\ \text{其中 } \beta = \sum_{\substack{T=1 \\ T \neq T}}^M \beta_{CT} / (M-1). \quad (5)$$

因此上述的過程便可決定模糊分類器，若有一測試樣本 $\bar{x} = (x_1', x_2', \dots, x_n')$ ，則利用以下步驟來推論此測試樣本所屬的類別，其推論步驟如下：

步驟一：計算此測試樣本屬於第 T 類的歸屬度 α_{CT}

$$\alpha_{CT} = \max \left\{ \prod_{i=1}^n A_{(i, j_i)}(x_i') \cdot CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \mid y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} = T \text{ and } R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \in S \right\} \quad (6)$$

步驟二：找出此測試樣本歸屬的類別 Y

$$\alpha_{CY} = \max\{\alpha_{C1}, \alpha_{C2}, \dots, \alpha_{CM}\} \quad (7)$$

根據模糊規則的生成過程，我們可知後件部的輸出類別 $y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 是由在 M 類上的 β_{CT} ， $T \in \{1, 2, \dots, M\}$ 最大值來決定，而模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 之可信度 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 有兩個特性：

- 如果在模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 所分割之模糊子空間的樣本都屬於同一類，使得 $\beta_{CT} \approx 0$ ， $T \neq Y$ 則 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \approx 1$ (最大的可信度)，這種情形可以確定在這子空間中的任何樣本都屬於這個模糊規則後件部 $y_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 的類別。
- 如果在模糊規則 $R_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 所分割之模糊子空間混雜著每一類的樣本，使得

$\beta_{C_1} \approx \beta_{C_2} \approx \dots \approx \beta_{C_M}$ ，則 $CF_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \approx 0$ (最小可信度)，這種情形會使得模糊規則的可信度很小。

因此，前件部之模糊集合所分割的模糊子空間集合便決定了後件部的輸出類別及規則可信度。也就是說不同的模糊輸入空間分割便會產生不同的模糊分類器。所以在設計前件部模糊集合時，應盡可能產生(a)情形的模糊子空間及避免(b)情形的模糊子空間。然而傳統將每一個維度平均分割所得到的輸入空間，若分割數過少的話，則往往會產生(b)的情形；但若分割數過多的話，雖可以避免(b)的情形，但會導致規則數過多的情形。為了避免傳統設計方式所導致的缺點，我們於下章節將應用遺傳演算法來尋找每個維度的重要模糊集合，使得所得到的模糊分類器可以正確地敘述訓練樣本的類別。

3 基於遺傳演算法之模糊分類器

在這章中，我們應用遺傳演算法來擷取每一維度的重要模糊集合，使得所設計的模糊分類器具有較少的模糊規則及良好的分類能力以正確地描述訓練樣本的分類情形。遺傳演算法最初是由密西根大學的 John Holland 教授於西元 1975 年提出，主要是模仿自然界中生物彼此競爭淘汰的過程，以達到進化的目的[2,3]。近年來，遺傳演算法已被廣泛地應用到最佳化的搜尋問題上，利用平行處理的方式一次用多個點同時去搜尋最佳解，故較不易落入局部極值的陷阱。然而，它並不是漫無目的地搜尋，而是根據所面臨的問題轉化之適應函數來決定其搜尋的方向。適應函數值代表著解集合對外在環境的適應度，適應度愈高表示在此環境下此組解集合愈佳。決定搜尋方向後，再運用一些擬生物化的人工運算過程：複製、交配及突變等運算子以進行演化，來保留族群之間最好的遺傳特質以及運用一個隨機資料的交換來產生優良的個體。

根據前一章的描述，我們可得知不同的前件部的輸入空間分割會產生不同的模糊分類器。因此為了建構一模糊分類器使得訓練樣本能正確地分類且具較少的模糊規則，我們以個體來表示前件部的模糊集合，再經由訓練樣本的訓練以得到所決定的模糊分類器，而訓練樣本的分類結果及模糊規則數便可做為個體所決定的模糊

分類器之評估效能值。因此，我們定義一具 L 個個體的族群 P ，其表示如下：

$$P = \{I^1, I^2, \dots, I^L\} \quad (8)$$

其中 I^k ， $k \in \{1, 2, \dots, L\}$ 為族群中的個體，並以下列字串的形式來表示：

$$I^k = \{I_{i_1}^k, I_{i_2}^k, \dots, I_{i_{b_1}}^k, I_{i_{21}}^k, I_{i_{22}}^k, \dots, I_{i_{2b_2}}^k, \dots, I_{i_{n1}}^k, I_{i_{n2}}^k, \dots, I_{i_{nb_n}}^k\} \quad (9)$$

其中 I_{ij}^k ， $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ， $j \in \{1, 2, \dots, b_i\}$ ，是一個二進位元的數值，故其值不是 1 就是 0。我們利用子字串 $\{I_{i_1}^k, I_{i_2}^k, \dots, I_{i_{b_i}}^k\}$ 來分割第 i 維輸入空間及確定第 i 維輸入空間變數的歸屬函數的外形。此一子字串是由 0 和 1 所組成，若位元值為 "1" 的數目為 d_i ，則 d_i 可視為第 i 個輸入變數的模糊集合的數目。除此之外，我們定義 $D_{(i,j)} \in \{1, 2, \dots, b_i\}$ 代表的是第 i 維輸入空間中，在子字串 $\{I_{i_1}^k, I_{i_2}^k, \dots, I_{i_{b_i}}^k\}$ 中含有 "1" 的指標。

考慮 m 個訓練樣本 $\bar{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn}, y_p)$ ， $p=1, 2, \dots, m$ ，其中 $\bar{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})$ 為第 p 個訓練樣本的輸入向量，而 y_p 是相對應的輸出。根據訓練樣本的輸入資料，我們定義輸入變數的範圍 $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ 。因此，對於第 i 維變數的每一個歸屬函數的中心點可由下述算式決定

$$c_{(i,j)} = x_i^{\min} + (D_{(i,j)} - 1) \cdot s_i, \quad j_i \in \{1, 2, \dots, d_i\} \quad (10)$$

其中 $s_i = \frac{(x_i^{\max} - x_i^{\min})}{(b_i - 1)}$ ，另一方面，對第 i 維輸入變數的每個歸屬函數的左邊及右邊寬度可分別決定如下：

$$w_{(i,j)}^l = \sqrt{\frac{(c_{(i,j-1)} - c_{(i,j)})^2}{-\ln(u)}} \quad (11)$$

及

$$w_{(i,j)}^r = \sqrt{\frac{(c_{(i,j+1)} - c_{(i,j)})^2}{-\ln(u)}} \quad (12)$$

其中 $c_{(i,0)} = x_i^{\min}$ ， $c_{(i,d_i)} = x_i^{\max}$ 及 $u \in [0,1]$ 為控制兩個鄰近歸屬函數重疊的因子，若 u 值愈大都表示兩個鄰近的歸屬函數重疊部分便愈多。根據(11)及(12)式可知， $A_{(i,j)}(c_{(i,j+1)})$ and $A_{(i,j)}(c_{(i,j-1)})$ 的歸屬函數值兩者皆為 u

值。所以每一個個體決定了前件部的模糊集合，再利用前一章所提的方式利用訓練樣本來決定模糊規則的後件部，如此模糊分類器便決定了。例如：若一個體表示為 $\{1101010111\}$ ，且其所探討的輸入空間為二維，此二維空間分別由二個子字串所表示 $\{11010\}$ 及 $\{1010111\}$ ，假設這兩個輸入變數的範圍 x_1 及 x_2 分別為 $[-2,2]$ 及 $[-3,3]$ 。依據上述，我們可以得到以下的結果：

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, s_2 = 1; d_1 = 3, d_2 = 5; \\ \{D_{(1,1)}, D_{(1,2)}, D_{(1,3)}\} &= \{1, 2, 4\}, \\ \{D_{(2,1)}, D_{(2,2)}, D_{(2,3)}, D_{(2,4)}, D_{(2,5)}\} &= \{1, 3, 5, 6, 7\}; \\ \{C_{(1,1)}, C_{(1,2)}, C_{(1,3)}\} &= \{-2, -1, 1\}, \\ \{C_{(2,1)}, C_{(2,2)}, C_{(2,3)}, C_{(2,4)}, C_{(2,5)}\} &= \{-3, -1, 1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (13)$$

對輸入變數為 x_1 及 x_2 而言，分別有三個及五個模糊集合，若 α 的值被設定為 0.15，則每一維度所得到的歸屬函數如圖一所示。因此，所得到的模糊集合便將輸入空間分割成 $3 \times 5 = 15$ 個模糊子空間。

為尋找適當的個體使得所決定的模糊分類器能正確分類出最大的樣本數目及具有少量的模糊規則數。所以適應函數可表示成

$$F(I^k) = W_{NCP} \cdot NCP(S(I^k)) - W_S \cdot |S(I^k)| \quad (14)$$

其中 $S(I^k)$ 表示個體 I^k 所決定的模糊分類器， $NCP(S(I^k))$ 為訓練樣本正確分類的數目， $|S(I^k)|$ 表示模糊分類器的模糊規則數， W_{NCP} 及 W_S 分別為 $NCP(S(I^k))$ 及 $|S(I^k)|$ 的權重值。因此族群經由不斷地複製，交配及突變等運算之後，必能決定正確率高且規則數少的模糊分類器，其流程如圖二所示。

4 模擬結果

為了驗證所提方法的可行性，我們利用一個二維輸入樣本的分類問題如圖三所示，由圖三可知，這是一個兩類的分類問題，其中左半邊必須要較窄的模糊集合來進行分割，而右半邊是要較寬的模糊集合來進行分割。在遺傳演算法上，我們設定以下的參數：族群個體數為 50，遺傳基因位元數為 30，交配率 0.9，突變率 0.1，搜尋代數為 50 代，適應函數之權重值 W_{NCP} 及 W_S 分別為

10 及 1 及重疊因子為 0.15，其中每一維度分配相同的基因位元數 15。因此，每一維度最多 15 個模糊集合，而產生的模糊分類器最多具有 225 條模糊規則，經由遺傳演算法依所適應函數的指引，我們可得輸入變數的模糊集合如圖四所示，由圖四中我們可發現所得的模糊集合，分佈於左半邊是以較窄的模糊集合來進行分割，而右半邊是以較寬的模糊集合來進行分割，此結果和此訓練樣本的分佈是一致的。同時經由訓練樣本的訓練可得一模糊規則之後件部，所得到模糊分類器之模糊規則如表一所示，而此模糊分類器的分類結果如圖五所示。由結果可知，所提的方法確實完全分類此訓練樣本，並能擷取輸入空間每一維的重要模糊集合以得到較少的模糊規則。

5 結論

本論文中，我們利用遺傳演算法來設計一模糊分類器，使得所設計的模糊分類器具有較少的模糊規則及較高的分類能力來正確地描述訓練樣本的分類情形。傳統模糊分類器的設計方法，通常必須預設每一維輸入空間的分割數以將輸入空間平均分割，太多的分割雖可以得到相當好的分類結果，但會導致過多的模糊規則；相對的，太少的分割會導致不佳的分類能力。因此，我們利用遺傳演算法來擷取每一維度重要的模糊集合，藉此以適當地分割輸入空間，使得所得到的模糊分類器在具有極高的分類能力的前提下，具有較少的模糊規則。從模擬結果可知，所提的方法確實能依據訓練樣本的分佈來適當的分佈每一維的模糊集合，而產生重要的模糊規則來組成模糊分類器。因此，基於遺傳演算法之模糊分類器在解決分類問題上提供了一個不錯的方法。

6 參考文獻

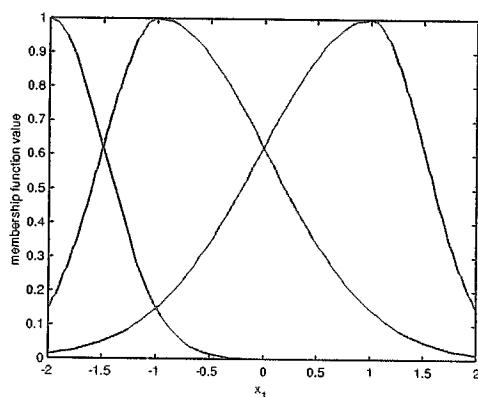
- [1] S. Abe and M.S. Lan, "Fuzzy rules extraction direct from numerical data for function approximation, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol 25, pp.119-129, 1995.
- [2] L. Davis (Ed.), Handbook of Genetic Algorithms (Van Nostrand Reinhold, New York, 1991).
- [3] D.E. Goldberg, Genetic Algorithms in Search

Optimization, and Machine Learning (Addison-Wesley, Reading, MA, 1989).

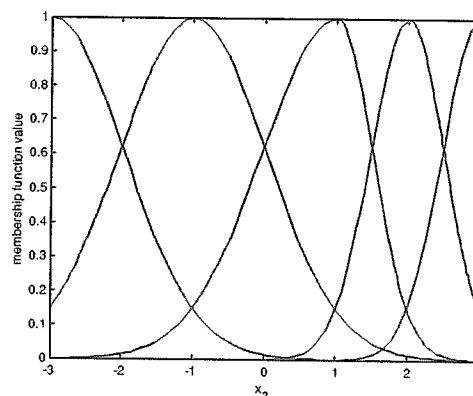
- [4] H. Ishibuchi, K. Nozaki, and H. Tanaka, "Distributed representation of fuzzy rules and its application to pattern classification," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 52, pp. 21-32, 1992.
- [5] H. Ishibuchi, K. Nozaki, N. Yamamoto, and H. Tanaka, "Selecting fuzzy if-then rules for classification problems using genetic algorithms," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 3, No.3, pp 260-270, 1995.
- [6] L.X. Wang and J.M. Mendel, "Generating fuzzy rules by learning from examples," *IEEE Trans. on Systems Man and Cybernetics*, Vol. 22, No. 6, pp. 1414 -1427, 1992.
- [7] L.X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control* (Prentice Hall, New Jersey, 1997)
- [8] C.C. Wong and N.S. Lin, "Rule extraction for fuzzy modeling," *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 88, pp 23-30, 1997.
- [9] R.R. Yager and D.P. Filev, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control* (John Wiley, New York, 1994)

表一 模糊分類器之模糊規則

規則	輸入變數 X_1			輸入變數 X_2			輸出類別	可信度
	中心位置	左邊寬度	右邊寬度	中心位置	左邊寬度	右邊寬度		
1	0.1429	0.1037	0.2074	0.0714	0.0519	0.0519	1	0.4532
2	0.1429	0.1037	0.2074	0.1429	0.0519	0.3112	1	0.0190
3	0.1429	0.1037	0.2074	0.5714	0.3112	0.0519	1	0.6994
4	0.1429	0.1037	0.2074	0.6429	0.0519	0.1037	1	0.4649
5	0.1429	0.1037	0.2074	0.7857	0.1037	0.1556	1	0.6537
6	0.4286	0.2074	0.4149	0.0714	0.0519	0.0519	2	0.3228
7	0.4286	0.2074	0.4149	0.1429	0.0519	0.3112	2	0.6480
8	0.4286	0.2074	0.4149	0.5714	0.3112	0.0519	2	0.3390
9	0.4286	0.2074	0.4149	0.6429	0.0519	0.1037	2	0.4175
10	0.4286	0.2074	0.4149	0.7857	0.1037	0.1556	2	0.0648

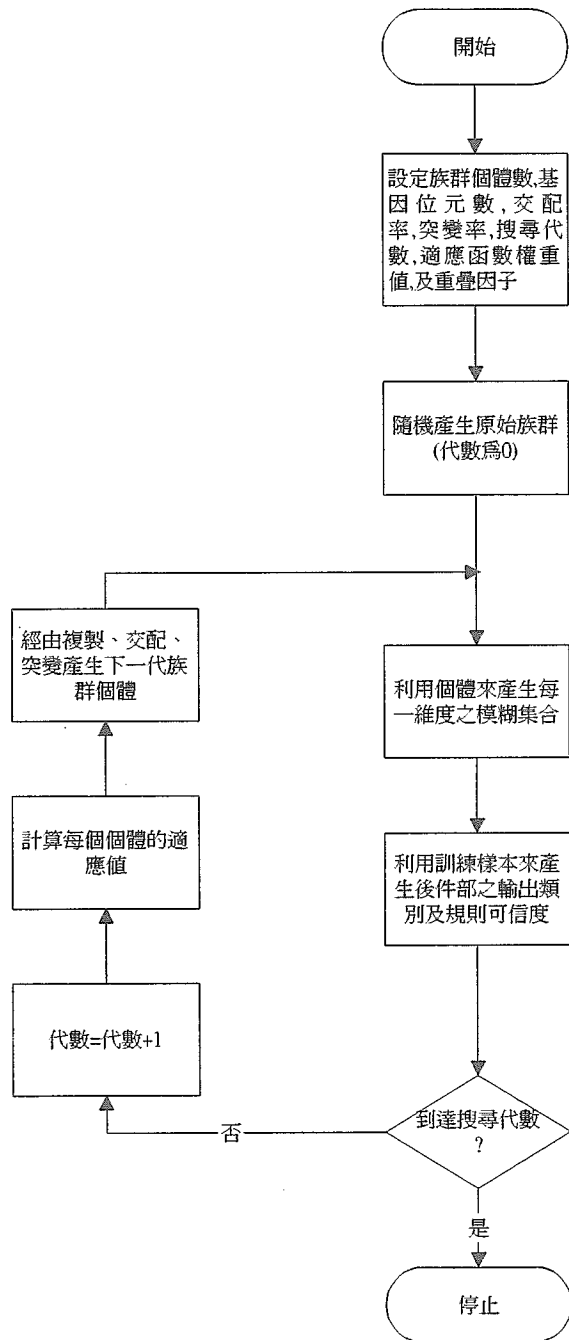


(a)

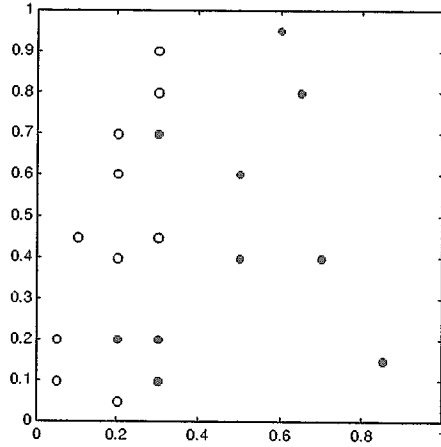


(b)

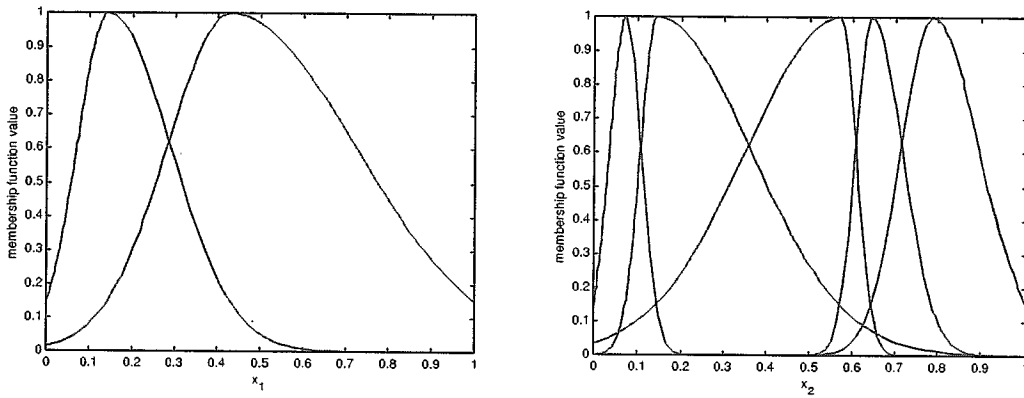
圖一 (a)輸入變數 X_1 之歸屬函數 (b)輸入變數 X_2 之歸屬函數



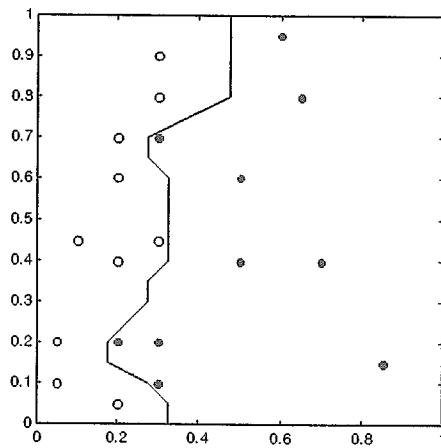
圖二 所提方法之流程圖



圖三 二維分類問題之訓練樣本



圖四 模糊規則之前件部模糊集合



圖五 基於遺傳演算法之模糊分類器之分類結果