計算幾何學在多重選區劃分之研究

Maw-Kae Hor (何瑁鎧)
National Chengchi University, Taiwan, ROC
Email: hor@cs.nccu.edu.tw

Hung-Min Hsu (許宏敏)
National Chengchi University, Taiwan, ROC
Email: g9531@cs.nccu.edu.tw

摘要— **過去我們曾利用計算幾何學和人工智慧的技巧分析選區劃分的問題而提出人口二分法，對簡單選區進行劃分。然而單純的人口二分法無法直接用以處理較複雜的選區劃分問題，必須有進一步的分析與限制。本論文針對此問題提出了人口比例二分法，透過重覆使用人口比例二分法，我們將複雜的多重選區劃分化簡為簡單的選區劃分問題。我們同時提出了「不可分割」的觀念，運用此一觀念以及人口比例二分法，並輔以單純的砌磚法，我們成功的將多重選區劃分問題的解集合數目控制在電腦能處理的範圍之內。此外，我們對選區形狀完整性提出了新的評估方式，可以更有效地篩選出較佳的選區劃分解作進一步的分析。**

關鍵詞— **人工智慧、計算幾何學、選區劃分**

一、前言

選舉是政黨取得政權的方式，而選區劃分足以左右選舉的勝負。因此每當面臨選區重劃的議題，就是政黨彼此角力的時刻。如果選區劃分被過分的操縱，不僅會影響選民的投票意願，更重要的是可能會失去投票的意義。我們希望能提出一個系統化的選區劃分工具，透過資訊科技的處理，以公平公正的原則來自動進行選區劃分。

我國的立法委員選舉在第一屆到第六屆都是採取單記不可讓渡制，多數選區應選名額多於一位，但是選民只能投一票，依得票高低決定選舉結果。從第七屆起，立法委員選舉方式改為單一選區兩票制，一票是候選人票，另一票是政黨票，候選人票決定該選區應選的一名立法委員，而政黨票決定不分區立法委員的人選。因為選舉法規的改變的緣故，過去的選區劃分方式已不適用，選區重劃的需求隨之而生。

二、選區劃分的原則

過去選區重劃大都採取人工劃分的方式，人工劃分不僅需要大量的人力，而且由於選區劃分對於選舉結果的影響甚巨，所以在選區重劃的過程中不免產生關於公平性的爭議。我們希望提出自動化劃分的工具，為選區劃分提供參考及輔助。我們預期得到大量的選區劃分結果，根據重複使用二分法希望可以系統化的產生大量的選區劃分方式。

過去的論文對於選區劃分的原則大致上可歸類成下面幾項:

1. 各選區合理的人口誤差：每個選區各有選民人口數，而各個選區的選民人口誤差在規定的範圍之內。
2. 選區必須彼此連接：每個劃分出的選區不能有飛地(enclave)的情形，飛地就是在選區內含有非該選區的行政單位。
3. 選區形狀簡單完整：我們要求各選區不能有奇形怪狀的情況，以避免傑利蠑螈 [1]的問題產生[4](如圖一)。
4. 保障少數族群的權益：因為有些族群因為文化或是風土民情而密不可分。可以事先將這些選區設定成為不可分割的部份。

---

[1] 傑利蠑螈是指選區劃分之方式是專為某方選舉利益而設計的，這個字詞從美國麻薩諸塞州州長蓋利(Elbridge Gerry)的名字，及當時劃分後的選區形狀貌似蠑螈(salamander)此兩者而來。

圖一 傑利蠑螈之選區劃分

5. 不破壞自然疆界：選區劃分時的考量必須包含河川、山脈等天然屏障，以及陸橋、高速公路等等的交通設施，以降低選舉成本。
6. 不破壞自然疆界：選區劃分時的考量必須包含河川、山脈等天然屏障，以及陸橋、高速公路等等的交通設施，以降低選舉成本。
7. 行政區域的完整：劃分選區時應避免過度切割既有的行政區域，如果非切割不可，希望切割次數儘量少（如至多切割一次）。

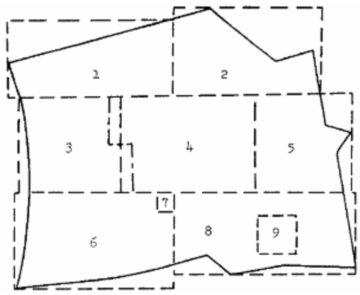
三、相關研究

過去有些跟選區劃分相關的研究，在 1964 年 Harris 提出了矩形劃分法[5]，他提到了選區劃分的原則，而後來的選區劃分的論文幾乎都是依照他的選區劃分原則。後來在 1965 年的時候，Kaiser 針對了選區劃分原則中的人口均等的原則提出了人口均等的評估函式[6]，提供了如何去判斷人口均等的參考。同年，Leach 等人提出了分治法去做選區劃分[7]。

在本論文中將採用 Harris 所提出的選區劃分原則，以及使用分群法的概念去多重劃分選區。而在要劃分不可分割區時，使用了何瑁鎧、李俊瑩等人在 2005 年提出的砌磚法[1]來處理。

(一) 矩形劃分法

Harris[4]認為做選區劃分的第一階段的劃分原則是人口均等、連接性、形狀完整性和一個選區組成單位只能被一個選區所包含。他提出正方形的選區，以提供較佳的形狀完整性，因為正方形的選區可以完美契合，並且不會造成任何空間的浪費。不過只要經過調查就可以得知，想劃分出所有選區都是正方形的選區是不切實際的。所以選區將州完整的包圍成矩形(如圖二)，如此一來便可以達成形狀完整性，其中矩形並非是真正的矩形，實際的作法是以經度緯度為基準。



圖二 矩形劃分法產生之選區

(二) 人口均等法

Kaiser[6]這篇論文企圖用數學方法去計算行政單位的人口分配的品質。雖然沒有去處理選區劃分這種複雜的問題，但是人口均等(population equality)的維持其實在選區劃分中扮演很重要的角色。目標在於組合這些數據去產生一個數字或是索引，然後用來解釋人口分配的品質。

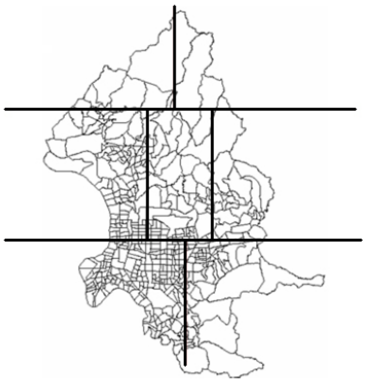
(三) 分群法

在Leach等人的定義中[7]，選區劃分的問題就是將地表劃分為 2 份或多份。而這種問題也可以衍生為學區劃分的問題或是水資源分配的問題等等。Leach 是用分群的方式(Grouper approach)，將人口分為大大小小的單元，藉以降低選區劃分問題的複雜度。接著他去排序各個人口單位的中心座標，較為集中的優先處理，以提升找出選區結果的速度。而排序的方式就是任選一個人口單位，之後其他單位依照歐幾里得幾何

(Euclidean geometry)距離公式所求出的距離當作順序。然後代入背包問題(knapsack problem)[2]的解法，分群完畢選區也就劃分完成。

(四) 砌磚法

砌磚法[1]是以水平或是鉛垂的方向去切割選區，如圖三，然後透過切割線上下左右的移動去調整選區的人口誤差，優點是容易實作，但是切割線必須透過經驗法則來製作，缺點是產生的選區難以符合二級行政區的切割數和完整性。



圖三　砌磚法產生之選區

四、選區劃分

如前所述多重選區劃分就是將一個行政區劃分若干個選區的問題。假設一個直轄市或縣（市）有 n 個村里，要將這些村里劃分成 r 個選區（多重是 r 指大於 2)，使得各選區的人口誤差小於中選會所規定的標準。

假設集合 V 來表示 n 個村里 v_i，即 $V=\{v_i \mid i=1,2,...,n\}$，同時以 $P(v_i)$ 表示村里 v_i 的人口數，選區劃分就是把集合 V 分成 r 個不相交的子集合 V_j ，$j=1,2,...,r$，而 $P(V_j)$ 代表選區的人口數。

選區劃分滿足以下條件：

1. 各選區人口大致相等：各選區人口誤差必須小於 $\pm\varepsilon$ (依中選會的規定 $\varepsilon=15\%$)，亦即：

$$\left|\frac{P(V_j)-P_a}{P_a}\right| \le \varepsilon \qquad (1)$$

$$P_a=\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{n}P(v_i)\right) \qquad (2)$$

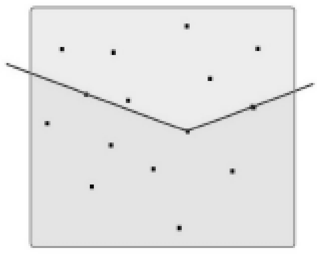
其中(2)是該行政區域內的選區平均人口數

2. 同選區的村里必須滿足連接性。
3. 選區形狀大體完整：劃分出來的選區不可以是奇怪的形狀以避免傑利蠑螈問題[4]。

此外，在數學的完備性上我們會要求劃分出來的子集合是相異的，即任一村里只能劃分給一個選區，同時每一村里必須劃分給某一選區。

(一) 人口比例二分法

人口二分法[2]用計算幾何學(computational geometry)的技巧將一個行政區劃分為兩個選區。原始的二分法要求劃分出來的兩個選區人口數大致相等(如圖四)，我們修正後的人口比例二分法，可依不同的人口比例將選區劃分成兩部分。我們可用 $T(2)=T(2,i:j)$ 表示修正後的二分法，將行政區人口依 i 與 j 之比例劃分成兩部分，其中 i 和 j 可以是任意的正整數。透過重複使用修正後的二分法，我們可以處理多重選區劃分的問題，亦即將行政區劃分成任意選區數。

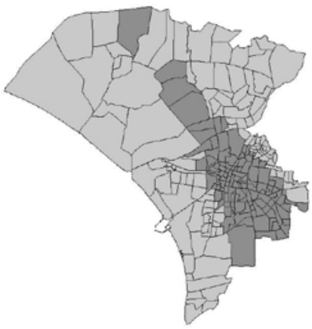


圖四 人口二分法

[2]背包問題是一種組合最佳化的問題，問題描述為：給定一組物品後，如何適當的選取物品放置於給定的背包中，使得選取之物品滿足最佳化的條件[8]。

(二) 連接性檢查

人口比例二分法所劃分出來的選區，可能是破碎的選區。如圖五所示，一塊深色的村里落在淺色的選區，這違反條件 2 當中，同選區的村里必須滿足連接性。所以人口比例二分法產生的選區必須經過連接性的檢查以剔除不適合的劃分結果。本論文中我們採用先深搜尋法(depth-first search)[8]檢測連接性，以確保選區中各個村里彼此相連接。



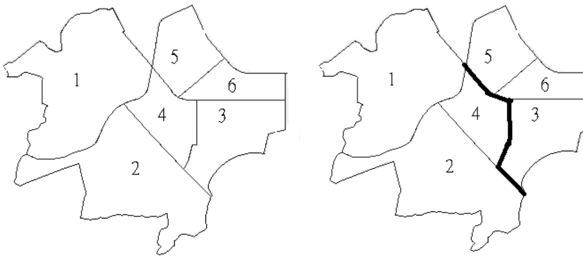
圖五 不滿足連接性之選區劃分

(三) 重複性偵測

當人口比例二分法將選區一分為二的時候，因為由中心點依扇形方向累加村里的緣故，劃分出來的選區會有重複的情形。

從台中市取出 6 個村里來當例子(如圖六左)，從小的村里編號到大的村里編號分別是樹德里、樹義里、永興里、工學里、平和里和南和里。這 6 個村里欲劃分為 2 個選區，假設 6 個村里分成 2 個選區是 112122(如圖六右)，其中的順序是依照村里編號。而 1 代表被分配到第一選區，2 代表被分配到第二選區。所以 112122 的意思是樹德里被分配到第一選區，樹義里被分配到第一選區，而永興里被分配到第二選區，以此類推。

假設有兩種選區劃分的結果分別是 112122，而另一個結果為 221211。事實上這兩種結果都是一樣的，但是在電腦判別上會認為是不同的劃分結果。

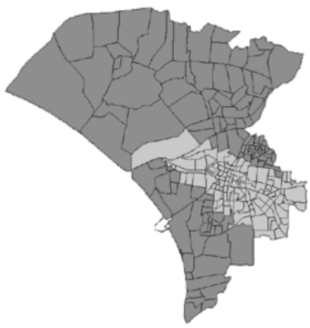


圖六 重覆的選區劃分

在多重選區劃分的解集合表示上需要妥善的設計，不然在做重複性偵測時候將不好處理，而選區編碼也會是個問題。所以在試過很多種方法後，發現以集合的概念做為解集合表示比較好，因為我們必須針對解集合做後處理並剔除相同解，剛好 C++標準函式庫裡有集合的概念可以使用，這種資料結構不會儲存相同的元素，所以重複解自然會被剔除。

五、形狀完整性檢查

滿足了人口均等以及連接性的要求後，劃分出來的選區基本上是合理的選區，但是不保證不會有傑利蠑螈的問題(如圖七)，所以必須再作形狀完整性的檢查。



圖七 有傑利蠑螈問題之選區劃分

(一) 凸包面積比

透過凸包(convex hull)[3]與選區之面積比，可以很直觀的找出形狀較為完整的選區。凸包面積比越接近 1 的，代表形狀完整性較佳，如圖八所示左邊地圖的凸包面積比較右邊地圖接近 1，

因此判定為形狀較佳的選區。

圖八 凸包

凸包面積比:

$$\frac{\text{District\_Area}}{\text{ConvexHull\_Area}} \qquad (3)$$

(二) 最小外接圓面積比

最小外接圓形(如圖九)與選區之面積比可以找出較為聚合的選區，即越接近於圓形的選區。面積比越接近 1 代表越聚合，形狀完整性越佳。這種評量方式可以補凸包面積比之不足，因為凸包面積比比較高之選區不一定是聚合的形狀。圖九右邊地圖的最小外接圓形的面積比較左邊高，表現出來的形狀也較為聚合。

圖九 最小外接圓形

最小外接圓形面積比:

$$\frac{\text{District\_Area}}{\text{Min\_Enclose\_Circle}} \qquad (4)$$

六、多重選區劃分

(一) 重複使用人口比例二分法

理論上多重選區的劃分可以透過重複使用人口比例二分法來解決，譬如要劃分成三個選區，我們可以先將原始行政區域劃分成人口比例為二比一的兩個選區，然後再將人口為兩份的區域劃分成兩個人口比例為一比一的選區，最後成為三個人口大致相同的選區。如果要劃分成四個選區，我們可以採用兩種人口比例的劃分方式：(1)先將原始行政區劃分成人口比例為三比一的兩個選區，然後再將人口為三份的區域套用前述的例子劃分成三個人口比例大致為一比一的選區，最後形成四個人口大致相同的區域；(2)先將原始行政區劃分成人口比例為二比二的兩個選區，然後再將這兩個人口為兩份的區域分別利用人口比例二分法，各自劃分成兩個人口比例大致為一比一的選區，最後形成四個人口大致相同的區域。

假設我們用 T(n)來表達將行政區域劃分成為 n 個人口大致相等的區域，同時假設我們用 T(2, i:j)來表示行政區域劃分成人口比例為 i 比 j 的兩個區域，則上述劃分成三個選區的例子可以表達成先用 T(2, 2:1)劃分成人口比例為二比一的兩個區域，接下來再用 T(2, 1:1)將人口數位兩份的區域劃分成人口比例為一比一的兩個區域。(在不致產生混淆的情況下，我們將以 T(2)來表達 T(2, 1:1)。)

因此我們可以用下列的關係式來表達 T(3)：

$$T(3) = T(2, 2{:}1) + T(2).$$

而我們也可以用下列的關係式來表達 T(4)：

$$T(4) = \begin{cases} T(2,\ 3{:}1) + T(3) \text{ 或} \\ T(2,\ 2{:}2) + 2T(2). \end{cases}$$

我們可採用下列方程式(5)來表達上述的式子：

$$T(n) = \begin{cases} T(2,\ i:j) + T(i) + T(j) & i \neq j,\ i+j = n \\ T(2,\ i:j) + 2T(i) & i = j,\ i+j = n. \end{cases} \qquad (5)$$

上列方程式的意義為：劃分成 n 個選區，可先將原始行政區劃分成人口比例為 i 比 j 的兩個區域，必須滿足 i+j = n。如果 i 等於 j，接下來對兩塊人口均為 i 份的區域各自採用 T(i)繼續劃分；

如果 i 不等於 j，則各自採用 T(i)與 T(j)繼續劃分。

(二) 人口誤差

除了人口比例二分法本身需要考慮人口誤差，在做多重劃分的處理時，因為需要重複使用人口比例二分法，因此人口誤差值必須被額外再考慮。考慮第一次二分選區的情況，代入人口數誤差 $\pm\varepsilon$ ，但是第二次二分選區時，人口誤差值必須有所調整，因為拿已經套入人口誤差的人口數，再根據人口誤差百分比去做多重劃分將會產生錯誤。

假設有一個 300 人的行政區劃分成 3 個選區，第一次劃分最大差距值是 215 和 85 人。然後第二次劃分若是215 人的部分再代入15%的人口誤差值時，將不滿足總人口的 15%的範圍。

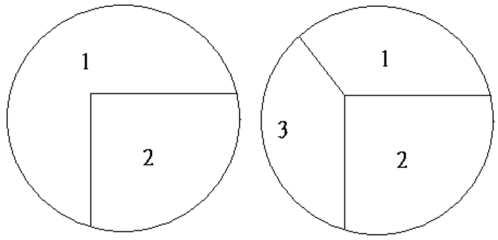
所以多重劃分選區時的總人口誤差值應該將人口上下限當作程式的參數，而不是以人口誤差百分比做為程式的參數。如方程式(6)，$p(V_j)$為選區人口數。

$$(1-\varepsilon)\, p_a \le p(V_j) \le (1+\varepsilon)\, p_a \qquad (6)$$

(三) 多重選區劃分之特性

多重選區劃分的處理方式與一般選區劃分不同，我們將會分成形狀完整性和連接性兩個部份來探討:

首先是對形狀完整性的影響，多重劃分選區會分成多次人口比例劃分以完成選區劃分，而人口比例二分法可依據任何比例劃分 2 塊選區 。這裡假設一塊圓形的選區欲分成 3 個選區。在第一階段中先劃出人口比例為二比一的兩塊選區，選區 1 和選區 2。因為人口比例二分法是使用扇形劃分選區[2]的幾何概念，可能會產生一些形狀不理想的選區（如圖十左）。如果在每次人口比例劃分都作形狀完整性的檢查，將會認定此為形狀不佳的選區，存在傑利蠑螈的問題。

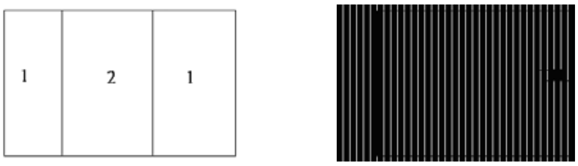


圖十 人口比例二分法多重劃分之選區

但是在第一次的人口比例二分法之後，在形狀完整性所認定的不良選區劃分，經過第二次的人口比例二分法之後不一定是不良的劃分方式。在圖十右中，對選區 1 做第二次人口比例二分法，劃出成兩個人口比例為一比一的選區，選區 1 和選區 3，而這樣 3 塊均勻的選區是很好的劃分結果。

雖然可以每次人口比例二分法當中都作形狀完整性的檢查以減少解的數目，但是會失去圖十右這種結果。所以本論文在多重選區劃分得出最終結果之後，再做形狀完整性的檢查。

接著討論對連接性的影響。在多重選區劃分中飛地是不被允許的。因此每次使用人口比例二分法之後，都會做連接性檢查，並將不符合連接性的結果加以去除。但是這樣的作法將會失去一些劃分結果。假設我們將一塊行政區域劃分為三個選區。考慮下面這種劃法，我們在第一階段先二分選區為人口比例為二比一的兩塊選區，接著第二階段再將人口為兩份的區域，劃分為兩個人口比例為一比一的選區，而完成三塊選區的劃分。但是圖 4.3 的飛地情形產生時加以剔除不一定是正確的決定。當飛地產生時，在第二階段劃分劃分中有消除飛地的可能性(如圖十一右)，在圖十一左中的飛地由於選區 1 再度的執行人口比例二分法，將選區 1 劃分成選區 1 和選區 3，而飛地因此消失而產生圖十一左這種滿足連接性的選區。



圖十一 飛地經第一階段劃分後以及飛地經第二階段劃分後

在實驗的過程中發現圖十一的情形是十分少見的，在不具連接性的劃分方式下再去作劃分其實大部分都不會滿足連接性。因此在本研究中採用在每次的人口比例劃分之後都做連接性檢查，不僅可以減少資料量而且可以降低電腦處理上的複雜度。雖然會犧牲部分不錯的結果，但損失的結果很少，而程式的效率卻可以大幅提升，更重要的是稍後會討論的巨量解集合的問題，所以也必須先做連接性檢查。

七、實驗結果

(一) 巨量解集合

桃園縣人口約有 180 多萬人，有十三個二級行政區，共有 461 個村里，依照人口比例，應選之立委席次為 6 席。

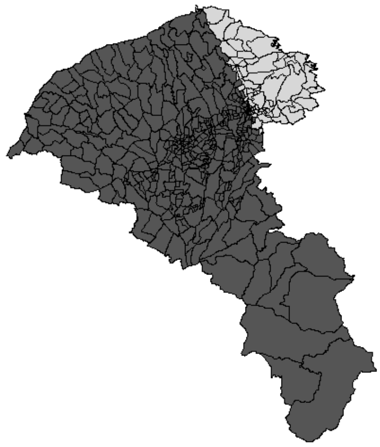
如前所述，第一次人口比例劃分有三種可能性:(1)劃分出人口比例為三比三的兩個選區；(2)劃分出人口比例為四比二的兩個選區;(3)劃分出成人口比例為五比一的兩個選區。

在桃園縣的實驗中上面 3 種劃分都需要 5 次的人口比例二分法。我們將會舉出五比一、四比一和三比一共 3 次的劃分方式以說明解集合之巨量。

如表一所示，桃園縣在五比一劃分時仍有大量的解集合數目，在滿足人口誤差範圍為 15%並通過連接性檢查的解數目有 564 萬多組。

表一 桃園縣在 5:1 劃分之下找到的解數目

人口誤差(%)	滿足人口條件之解數目	滿足人口條件及連接性之解數目	連接比(%)
0.001	1,579	424	26.85
0.01	16,297	4,249	26.07
0.1	162,675	42,474	26.10
1	1,628,617	424,733	26.07
10	16,283,629	4,093,226	25.13
15	24,451,957	5,647,709	23.09

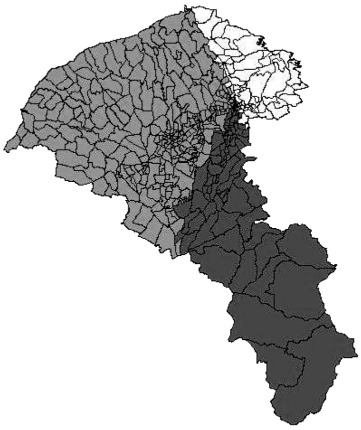


圖十二 隨機選出桃園縣 5:1 劃分，人口誤差 0.01%，滿足連接性檢查之解

如果我們從滿足人口誤差範圍為 0.01%並經過連接性檢查的 4249 個解集合中，任選一個解，再做四比一的劃分，討論出可能的解集合數。圖十二為自 4249 個解中隨機挑選出的一個解，表二為由此一解再做四比一之人口比例二分法的解集合數目，深色的部分有五份人口數。不失一般性假設每個五比一的劃分方式在人口誤差範圍為 15%並通過連接性檢查的解時都有 564 萬多組解，在經過兩次人口比例二分法產生的結果，將會有 192888 多億組解。

表二 桃園縣在 4:1 劃分之下找到的解數目

人口誤差(%)	滿足人口條件之解數目	滿足人口條件及連接性之解數目	連接比(%)
0.001	970	255	26.28
0.01	9,692	2,411	24.87
0.1	96,214	23,886	24.82
1	964,493	238,430	24.72
10	9,645,829	2,357,124	24.43
15	14,479,952	3,423,581	23.64



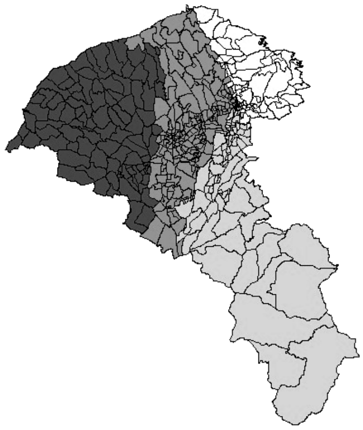
圖十三 桃園縣 4:1 劃分，人口誤差 0.01%，滿足連接性檢查之解

如果我們從滿足人口誤差範圍為 0.01%並經過連接性檢查的 2411 個解集合中，任選一個解，再做三比一的劃分，討論可能得出的解集合數。圖十三為自 2411 個解中隨機挑選的一個解，表三為由此一解再做三比一之人口比例二分法的解集合數目，灰色的部分有四份人口數。不失一般性假設每組三比一的解，在人口誤差範圍為 15%並滿足連接性檢查的解都有 342 萬多組，三次人口比例二分法產生的結果，最多將有 2931 多兆組解。

這些解集合已經大到電腦和人力都無法處理，光做連接性檢查是不足夠的。圖十四是從滿足人口誤差 0.01%並經過連接性檢查的 1031 個解集合中隨機挑選的一個解，中間的部分有三份人口數。

表三 桃園縣在 3:1 劃分之下找到的解數目

人口誤差(%)	滿足人口條件之解數目	滿足人口條件及連接性之解數目	連接比(%)
0.001	397	92	23.17
0.01	4,086	1,031	25.23
0.1	40,357	10,217	25.31
1	403,268	102,032	25.30
10	4,037,924	1,020,224	25.26
15	6,062,203	1,523,386	25.12



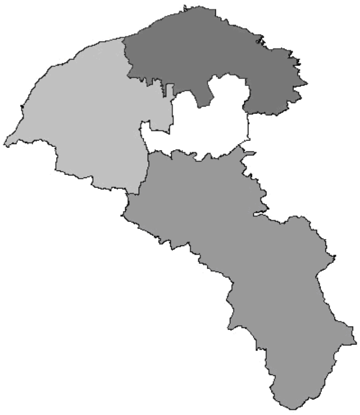
圖十四 桃園縣 3:1 劃分，人口誤差 0.01%，滿足連接性檢查之解

(二) 不可分割區

透過降低人口誤差的方式降低解的數目會犧牲選區劃分的彈性，所以我們採取設置不可分割選區來降低解集合的數目。

根據桃園縣二級行政區，復興鄉和大溪鎮位於桃園縣南方，顯而易見是一個不分可割的區域，劃分選區時都不會將它分割，其他的部份根據地理位置和形狀上的考量，我們觀察到由龍潭鄉沿著外圍的二級行政區往北設置不可分割區，在長寬比、凸包面積比和外接圓面積比上都會有較佳的結果，所以決定將北邊的大園鄉、蘆竹鄉和龜山鄉設為第一不可分割選區，西邊的觀音鄉、新屋鄉和楊梅鎮設為第二不可分割選區，而南邊的龍潭鄉、大溪鎮和復興鄉設為第三不可分割選區(如圖十五)。

圖十五 桃園市不可分割區



圖十六 砌磚法先劃分出的三個選區

劃分補足區域的部份，我們採取順著第二不可分割區的形狀，使用砌磚法針對中壢市做垂直劃分，並將劃分出來的部分村裡併入第二不可分割區，而另一部分的村里併入尚未劃分的選區。接著同樣順著第三不可分割區的形狀，用砌磚法對平鎮市做水平劃分，並將劃分出來的部份村里併入第三不可分割區，而另一部分的村里併入尚未劃分的選區。

在不可分割選區製作與補足之後(如圖十六)，桃園縣的選區劃分變成對桃園市、八德市、以及部分的平鎮市和中壢市做劃分成3個選區的問題。但是劃分 3 個選區勢必還是面臨大量解集合數目的問題，所以使用砌磚法劃分出一個完整選區。之後再對尚未劃分的區域使用人口比例二分法劃分出大量解集合數，以完成劃分 3 個選區的問題。

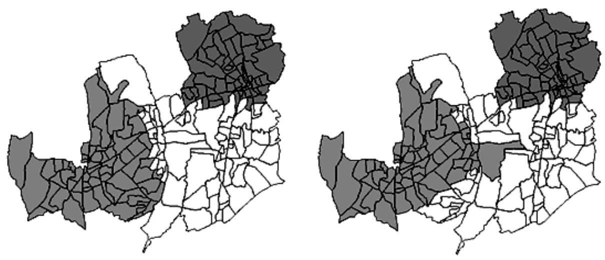
之前第二不可分割區之補足是選擇中壢市來劃分以及第三不可分割區是選擇平鎮市來劃分，在不希望一個二級行政區分屬 3 個選區的情況下，選擇兩種設定來討論，(1)對北邊的桃園市做橫向砌磚法水平劃分選區(如圖十七左)；(2)對東邊的桃園市和八德市做縱向砌磚法垂直劃分選區(如圖十七右)。

圖十七 兩種砌磚法的方式

(三) 形狀完整性之檢查

在實驗的過程中，採取先作凸包面積比的篩選以確保形狀不要凹凸不平，再作最小外接圓形面積比的評估來看整體的選區是較為聚合的劃分方式。

下面是在已產生之三個完整選區的剩餘部份，對北邊的桃園市作橫向砌磚法水平劃分出一個完整選區，再對尚未劃分的區域做人口比例一比一之劃分產生的解數目(表四)，圖十八是隨機選出的兩組劃分方式。

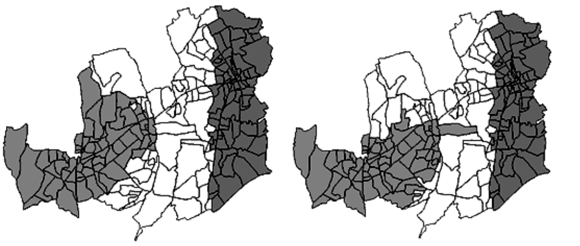


圖十八 桃園市經形狀完整性檢查之選區劃分

表四 桃園市經形狀完整性檢查之劃分結果

人口誤差(%)	凸包面積比(60%)	最小外接圓形面積比(%)				
		25	30	35	40	45
0.001	1	1	1	1	0	0
0.01	20	20	11	9	0	0
0.1	151	151	114	51	0	0
1	1,337	1,337	1,077	465	0	0
10	13,083	13,019	9,786	4,475	198	0
15	19,753	19,326	14,275	6,986	880	0

下面是在已產生之三個完整選區的剩餘部份，對東邊的桃園市和八德市做縱向砌磚法垂直劃分出一個完整選區，再對尚未劃分的區域做人口比例一比一之劃分產生的解數目(表五)，圖十九是隨機選出的兩組劃分方式。



圖十九 桃園市另一劃分經形狀完整性檢查之選區劃分

表五 桃園市另一劃分經形狀完整性檢查之劃分結果

人口誤差(%)	凸包面積比(60%)	最小外接圓形面積比(%)				
		20	25	30	35	40
0.001	0	0	0	0	0	0
0.01	5	5	5	5	1	0
0.1	97	97	94	39	2	0
1	878	878	824	323	24	0
10	8,351	8,351	7,834	4,202	568	0
15	12,546	12,544	11,648	7,015	1,440	0

八、結論與討論

我們的論文提出公平公正且系統化的選區劃分方法，透過重覆使用人口比例二分法，並導入不可分割的概念，在短時間內可以求得大量滿足人口誤差範圍的多重選區之劃分方式。我們利用了形狀完整性可以用來排序這些大量的解，並從中挑選出形狀較佳的解，再代入歷史選舉結果進行分析與評估。我們可以從大量不同的劃分方式中尋求滿足不同觀點的結果，並且我們的選區劃分方法具有一般選區劃分少見的不可分割的概念，相信我們的選區劃分方法較中央選舉委員會的選區劃分方法有著人口誤差更精確、形狀更佳以及爭議更小的優點。

十、未來發展

本論文仍有一些不足的地方可以作為未來研究與改進的參考。

在挑選用來補足不可分割選區的判定上，可以發展出更有系統的自動化方式，因為本論文是以村里作為基本劃分單位，如果將基本劃分單位向上提升到二級行政區不僅在保留二級行政區的完整上有幫助，而且可以幫助我們挑選補足不可分割選區的二級行政區。也許過程中不一定存在符合人口一致性的解，但是我們可以先放寬人口誤差的限制來求得起始的劃分方式，之後再利用人口比例二分法將人口誤差調整為合理之範圍。

形狀完整性是選區劃分的重點之一，這個部份有很多考慮的因素，每個評估方式各有優劣，所以複合性的評估方式是可以思考的方向，當然這需要靠實驗才能知道哪些評估方式是可以彼此互補不足的。本論文採用凸包面積比搭配最小包圍圓形面積比使用，改善了部份凸包面積比高卻還是不佳的劃分方式，但是形狀完整性還是有很多問題可以去探討，由實驗中可以發現人口比例二分法的結果受到人口密度相當大的影響，這部份只能從演算法根本去改進或是提高評估方法的效率。還有很多評估的方式可以做為選區好

壞的標準，像是凸包和選區周長比，若是凸包的周長和選區的周長越相近，則有較佳的形狀完整性。

使用人口比例二分法來處理多重選區，在效率上有很大的改進空間，因為人口比例二分法本身的時間複雜度就不低，加上遞迴產生的大量結果連帶影響了空間複雜度，也許再不久的未來這些硬體方面的問題都可以解決，但現階段只能從演算法本身，以及增設不可分割區來處理，所以這方面也是值得研究的部份。

十一、參考文獻

[1] 何瑁鎧、李俊瑩、劉克擴與游清鑫，“選區重劃之分析與探討”，第十 屆人工智慧與應用研討會，2005 年 12 月。

[2] 謝長紘，“計算幾何學在選區劃分之分析與應用”，國立政治大學資訊科學學系碩士論文，2008 年 10 月。

[3] 何瑁鎧與謝長紘，“計算幾何學在選區劃分之分析與應用”，第十三屆人工智慧與應用研討會，2008 年 11 月。

[4] E. Gerry, “The Gerry-mander” , Boston Gazette, 1812.

[5] C.C. Jr. Harris, “ Scientific Method of Districting” , Behavioral Science , 1964.

[6] H. F. Kaiser, “A Measure of the Population Quality of Legislative Apportionment”, American Political Science Review, Vol. 62, No.1, pp208-215, 1968.

[7] K. Abraham and S.P. Leach, “Expert Systems In Government: A Look At The Redistricting Problem” ,Washington University, Communications of the ACM, Vol. 15, pp.8, 1972.

[8] E.L. Charless, L.R. Ronald, S. Clifford and T. H . Corman, “Introduction to Algorithms”, Second Edition. MIT Press, 2001.