

逢甲大學學生報告 ePaper

全方位介電質反射鏡能帶結構與禁制角度之研究

Band Structures and Forbidden Angles of  
Omnidirectional Dielectric Mirrors

作者：馬英哲

系級：光電三乙

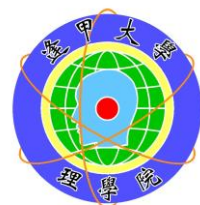
學號：D0455833

開課老師：蔡雅芝 老師

課程名稱：專題研究(二)

開課系所：光電科學與工程學系

開課學年：106 學年度 第 2 學期



## 中文摘要

本研究是以二維長方晶格光子晶體(photonic crystal)系統來模擬由多層介電材料組成的介電質反射鏡(dielectric mirror)，並以平面波展開法(plane-wave expansion)計算出其能帶結構以及能隙對應的禁制角度。我們採用頻率相關的等效折射率模型(effective index model)，透過司乃耳定律(Snell's law)將傳統以波向量表示的能帶結構，換算成以入射角度表示的角度能帶結構(angular band structures)。我們將此方法應用至不同材料組成的多層介電質系統，計算出對應的角度能帶結構，並分析其具備全方位能隙的條件。此研究結果有助於評估介電質反射鏡的表現，並可作為未來設計全方位介電質反射鏡及其相關系統的參考依據。

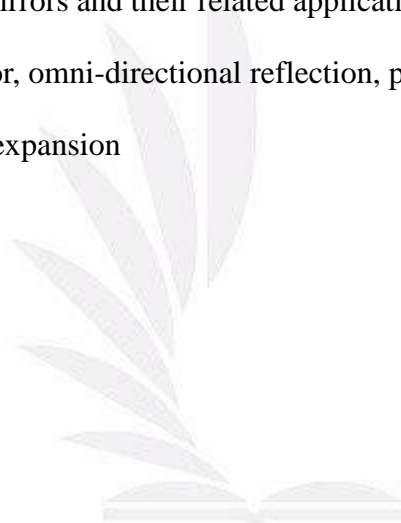
**關鍵字：**介電質反射鏡、平面波展開法、光子晶體、光子能帶結構、全方位反射



## Abstract

In this report, we employed the plane-wave expansion method to study the dielectric mirror composed of two alternating dielectric materials. To include the case of oblique incidence, we modeled the system by a semi-infinite two-dimensional rectangular photonic crystal embedded in air. By introducing a frequency-dependent effective index model, we calculated the angular photonic band structure from the conventional projected band structures with the help of Snell's law so that we can examine how the photonic band gaps vary with the incidence angle directly. We applied this approach to study several examples of different dielectric contrasts and analyzed the conditions for omnidirectional reflection. The results are helpful in evaluating the performance of dielectric mirrors and provide a guideline in designing omnidirectional dielectric mirrors and their related applications.

**Keyword** : dielectric mirror, omni-directional reflection, photonic crystal, photonic band structure, plane-wave expansion



## 目 次

一、摘要(Abstract)	p.4
二、序論(Introduction)	p.4
三、理論計算(Theory)	p.5
四、結果與分析討論(Result and analysis)	p.9
五、結論(Conclusion)	p.15



# 全方位介電質反射鏡能帶結構與禁制角度之研究

## Band Structures and Forbidden Angles of

## Omnidirectional Dielectric Mirrors

Ying-Jhe Ma (馬英哲) and Ya-Chih Tsai (蔡雅芝)

Department of Photonics, Feng Chia University, Seatwen, Taichung 407, Taiwan, R.O.C.

### 一、摘要(Abstract)

本研究是以二維光子晶體(photonic crystal)系統來模擬由多層介電材料組成的介電質反射鏡(dielectric mirror)，並以平面波展開法(plane-wave expansion)計算出其能帶結構以及能隙對應的禁制角度。我們採用等效折射率模型(effective index model)，透過司乃耳定律(Snell's law)將傳統以波向量表示的能帶結構，換算成以入射角度表示的角度能帶結構(angular band structures)。我們將此方法應用至不同材料組成的多層介電質系統，計算出對應的角度能帶結構，並分析其成為全方位介電質反射鏡的條件。

關鍵字：光子晶體、介電質反射鏡、全方位反射、光子能帶結構、平面波展開法  
Keywords: photonic crystal, dielectric mirror, omni-directional reflection, photonic band structure, plane-wave expansion

### 二、序論(Introduction)

光子晶體為介電分佈具有週期性之系統，電磁波經週期性介電係數成排列散射後，頻率位於某些波段的電磁波會形成破壞性干涉，導致電磁場的大小呈指數衰減而無法傳遞，此即能帶結構中的能隙[1]。自然界中早已存在光子晶體結構，例如蛋白石[2]及孔雀羽毛[2]都因為週期性結構而具有局部光子能隙，其能隙對應波段隨入射角度而變，造成反射光波長有所不同。在人造系統方面，自從1989年Yablonovitch和Gmitter以鑽孔法在 $Al_2O_3$ 塊材中製作出微波波段的三維光子晶體，證明光子能帶結構的存在後，相關研究便如雨後春筍般快速增長[3]。為了計算光子晶體的能帶結構及相關衍生特性，研究人員提出了各種理論計算方法[4,13-14]，目前以平面波展開法為光子晶體能帶結構的主要計算方法之一[4]。

受限於製作上的困難，目前光子晶體在實際應用大多以一維或二維的光子晶體為主[3]。一維光子晶體的主要應用為介電質反射鏡[5]，傳統的介電質反射鏡是由層狀介電材料交替排列的週期性結構，利用透射光的破壞性干涉來達到高反射率，其操作波段可透過介電係數或是層厚的組合加以改變，然而它的缺點為高反射率波段對應的入射角範圍有限，再加上會有布魯斯特角(Brewster's angle)的問題，因此介電質反射鏡的應用多半受限在入射角較小的情況下。

Fink 等人在1998年利用一維光子晶體的概念來改良介電質反射鏡，提出全

方位介電質反射鏡[6]。他們主張透過適當的介電係數及層厚組合，使特定頻率範圍內的光在任何入射光角皆能對應到光子能隙，同時將布魯斯特角排除在外，便可達成全方位反射(omni-directional reflection)的效果，成功地開拓一維光子晶體的應用。若更進一步將此層狀結構捲起來形成同心圓柱，落在能隙波段的入射光只能沿著柱芯傳遞，即為多層介電質光纖(Multilayer Dielectric Fiber)[7]，又為光子晶體的應用多添一筆。

### 三、理論計算(Theory)

#### 1. 平面波展開法(Plane-wave expansion method)

電磁波在光子晶體中的傳遞須遵守馬克斯威爾方程式。在缺乏自由電荷和電流及非磁性光子晶體的情況下，整理馬克斯威爾方程式可以分別得到只有電場  $\vec{E}(\vec{r})$  及只有磁場  $\vec{H}(\vec{r})$  的 Helmholtz 方程式[8]：

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \{ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \left[ \frac{1}{\varepsilon(\vec{r})} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}) \quad (2)$$

其中  $\varepsilon(\vec{r})$  為介電函數， $\omega$  為角頻率， $c$  為真空中光速。

光子晶體具有空間週期性，因此其介電函數為週期函數。在這裡我們採用所謂的 Fast Method[2]，先將  $\varepsilon(\vec{r})$  展開成

$$\varepsilon(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \xi(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (3)$$

其中  $\vec{G}$  為倒晶格向量， $\xi(\vec{G})$  為傅立葉轉換的係數，由下式得知

$$\xi(\vec{G}) = \frac{1}{V_0} \int \varepsilon(\vec{r}) e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (4)$$

其中  $V_0$  為單位晶胞體積。對  $\xi(\vec{G})$  取反矩陣

$$\kappa(\vec{G}) = \xi^{-1}(\vec{G}) \quad (5)$$

即可得到光子晶體的結構係數(structure factor)  $\kappa(\vec{G})$ 。

在光子晶體中傳播的電磁波可以根據布拉赫原理以平面波展開[9]：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{E}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \quad (6)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{H}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \quad (7)$$

其中  $k$  為第一布里淵區(Brillouin zone)的波向量， $\vec{E}(\vec{G})$  及  $\vec{H}(\vec{G})$  分別為電場和磁場的平面波展開係數，將(3)、(6)、(7)式帶入(1)和(2)式，經過整理後可以得到

$$-\sum_{\vec{G}} \kappa(\vec{G}-\vec{G}')(\vec{k}-\vec{G}') \times \{(\vec{k}+\vec{G}') \times \vec{E}(\vec{G}')\} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{G}) \quad (8)$$

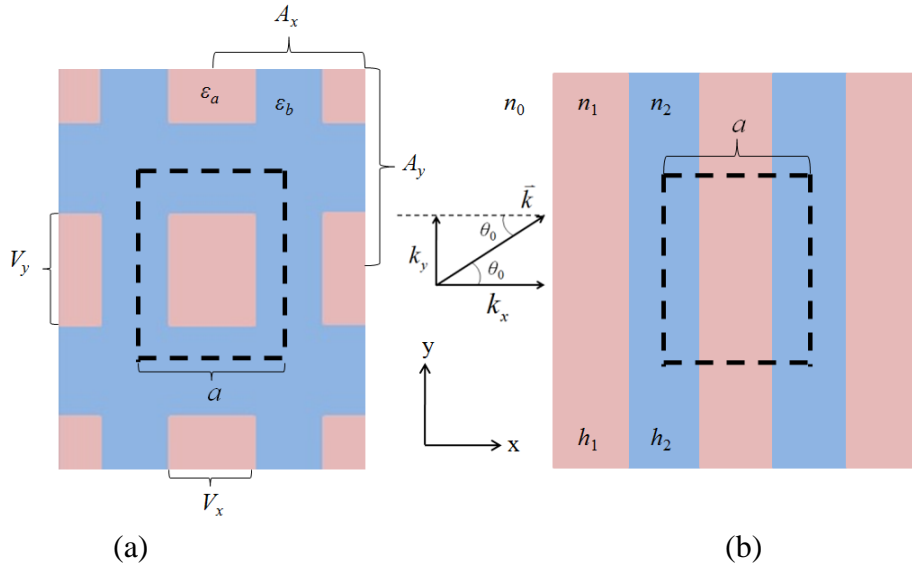
$$-\sum_{\vec{G}} \kappa(\vec{G}-\vec{G}')(\vec{k}-\vec{G}') \times \{(\vec{k}+\vec{G}') \times \vec{H}(\vec{G}')\} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{G}) \quad (9)$$

(8)、(9)式這兩條方程式是等價的本徵值方程式，我們只需要解其中一條方程式，求出本徵值，即可換算出色散關係 $\omega(\vec{k})$ ，求得能帶結構。

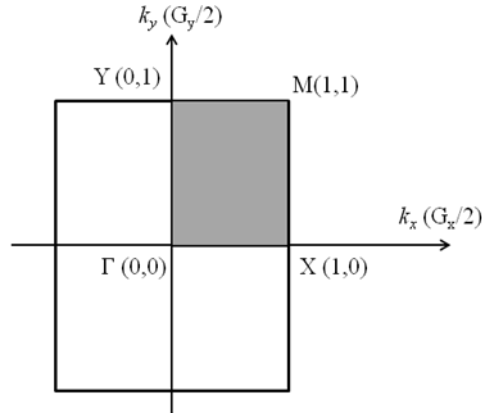
## 2. 多層介電質系統

在本論文中，我們以長方柱所組成的長方晶格二維光子晶體特例來模擬介電質反射鏡系統。圖一(a)虛線標示的是單位晶胞， $A_x$ 、 $A_y$ 為晶格常數， $V_x$ 、 $V_y$ 為長方柱的長和寬， $\varepsilon_a$ 及 $\varepsilon_b$ 為長方柱和背景的介電係數，填充率為 $V_x/A_x$ 。若將二維光子晶體中的長方柱沿 $y$ 方向延伸使 $V_y$ 和 $A_y$ 相等，則形成在 $x$ 方向具有週期性的介電質反射鏡，如圖一(b)所示，其中 $h_1$ 及 $h_2$ 分別為折射率 $n_1$ 及 $n_2$ 的介電材料的厚度，而 $a(=h_1+h_2)$ 為介電質反射鏡之週期。此系統雖然只具有一維週期性，但因須考慮斜向入射的情形，我們仍需進入二維光子晶體的計算。另外，系統的對稱性使我們只需計算不可約化布里淵區，即圖二中灰色部分，又由於能隙只會開啟在不可約化布里淵區邊界的布拉格面上，因此我們只需計算 $\Gamma Y$ 和 $XM$ 即可得到所需的能帶結構。

在選取計算所需的平面波數時，平面波數越大，計算結果的數值誤差越小，但計算花費的時間越長，所需記憶體也越大。我們以1681個平面波數為基準，當我們取529個平面波數來計算時，最低10條能帶的平均誤差小於0.3%，已達容許範圍，因此我們之後都是採用529個平面波數來進行計算。



圖一、(a)二維光子晶體結構示意圖， $A_x$ 、 $A_y$ 為晶格常數， $V_x$ 、 $V_y$ 為長方柱的長和寬， $\varepsilon_a$ 及 $\varepsilon_b$ 為長方柱和背景的介電係數。(b)由折射率為 $n_1$ 及 $n_2$ 之介電材料以厚度 $h_1$ 及 $h_2$ 堆疊成的介電質反射鏡， $n_0$ 為外界折射率。虛線標示出對應的單位晶胞。



圖二、第一布里淵區示意圖，灰色區域為不可約化布里淵區。

要計算光子能帶結構，我們得先計算  $\xi(\vec{G})$ ，我們可將  $\varepsilon(\vec{r})$  表示如下[7]

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)S(\vec{r}) \quad (10)$$

其中  $\varepsilon(\vec{r})$  為二維介電函數， $S(\vec{r})$  定義了長方柱的面積範圍，由下式可以得到

$$S(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{for } |x| \leq \frac{V_x}{2}, |y| \leq \frac{V_y}{2} \\ 0, & \text{for } |x| \geq \frac{V_x}{2}, |y| \geq \frac{V_y}{2} \end{cases} \quad (11)$$

$$\xi(\vec{G}) = \varepsilon_b \delta_{G_0} + \frac{1}{V_0} (\varepsilon_a - \varepsilon_b) \int_{V_0} S(\vec{r}) e^{-i\vec{G}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (12)$$

其中  $\delta_{G_0}$  為 delta function， $\vec{G}$  為二維倒晶格向量。將(12)式取反矩陣即可得到  $\kappa(\vec{G})$ ，再代入(8)、(9)式即可得到能帶結構。

### 3. 光線及布魯斯特線

當光從外界進入至光子晶體時，由於折射率的不同，在光子晶體內傳遞的角度會受到光線(Light line)的限制，因此在能帶結構圖中需加上光線才能得知有效的能帶結構範圍，亦即我們只需要觀察兩條光線內的能帶結構即可。在光子晶體外，光線須遵守色散關係如下

$$\omega = \frac{c}{n_0} |\vec{k}| \geq \frac{c}{n_0} k_y \quad (13)$$

其中  $n_0$  為外界折射率。

當光入射至兩種介電材料之間時，TM 模在布魯斯特角會發生完全透射的情



況，因此在能帶結構圖中 TM 模會有一條布魯斯特線(Brewster line)，而在光子晶體中布魯斯特線須遵守色散關係如下[10]

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_2}\right)^2} ck_y \quad (14)$$

其中  $n_1$ 、 $n_2$  為介電材料之折射率。

為了要設計出全方位介電質反射鏡，其中之一的條件為布魯斯特線的斜率必須小於光線的斜率，因此系統的各折射率須滿足下式

$$1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 < \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \quad (15)$$

此外，我們也可以從單一界面來探討布魯斯特角的影響。假設光從外界( $n_0$ )以掠入射( $\sim 90^\circ$ )進入至  $n_1$ ，所對應到  $n_1$  進入  $n_2$  的角度即為最大入射角  $\theta_{\max}$ ，相當於能帶結構圖中的光線，最大入射角計算公式如下

$$\theta_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{n_0}{n_1}\right) \quad (16)$$

而 TM 模在布魯斯特角會發生完全透射的情況，反應在能帶結構圖中的布魯斯特線，兩種介電材料之間的布魯斯特角計算公式如下

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (17)$$

從單一界面來看，想要設計出全方位介電質反射鏡，條件之一為最大入射角必須小於布魯斯特角，關係式如下

$$\theta_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{n_0}{n_1}\right) < \theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (18)$$

在結果與分析討論中，我們將使用(18)式作為判斷系統是否為全方位介電質反射鏡的條件之一，再配合由能帶結構歸納得到的能隙範圍限制[6]，才有機會得到全方位能隙。

#### 4. 角度能帶結構的推導

為了配合實際應用所需，我們利用等效折射率模型，將傳統對波向量作圖的光子能帶結構，進一步轉換成對入射角作圖的角度能帶結構。將空間分為外界和光子晶體兩部份，並將光子晶體視為等效折射率  $n^*$  的均勻材料，而不同的  $\omega$  可以對應到不同的等效折射率

$$n^* = \frac{ck}{\omega} \quad (19)$$

此處的  $\omega$  和  $k$  可由能帶結構得知。

電磁波在光子晶體內傳遞方向與  $x$  軸的夾角  $\theta_{PC}$  滿足

$$\sin(\theta_{PC}) = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (20)$$

再利用司乃耳定律  $n_0 \sin \theta_0 = n^* \sin \theta_{PC}$ ，即可推導出光由外界進入至光子晶體的入射角

$$\theta_0 = \sin^{-1} \left( \frac{c \cdot k_y}{n_0 \cdot \omega} \right) \quad (21)$$

由上式可知，不同頻率或能量的電磁波以相同的入射角進入光子晶體後，會激發不同  $k_y$  分量的波，因此我們只要找到適當的介電材料組合，讓所有角度的入射的電磁波對應到光子能隙，便可以實現全方位反射。

#### 四、結果與分析討論(Result and analysis)

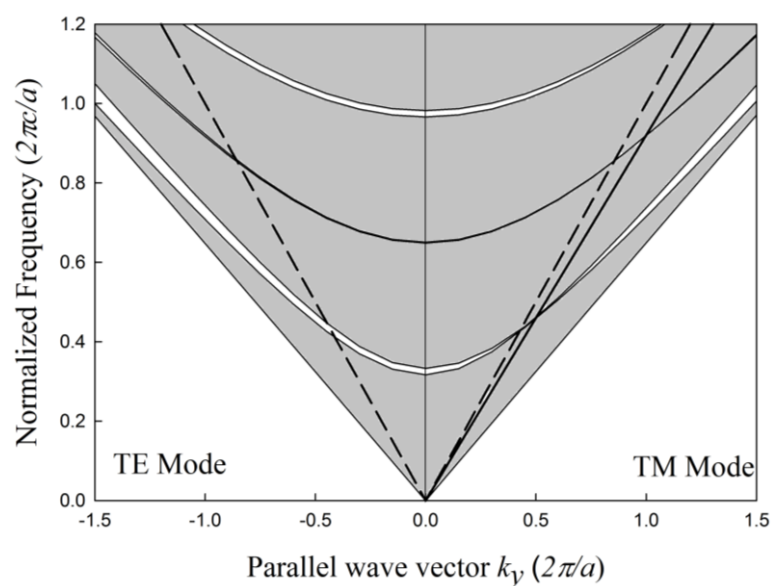
接下來，我們假設外界皆為空氣( $n_0=1.0$ )，針對介電材料折射率比值( $n_1/n_2$ )較小和較大的兩種情況進行模擬，根據上述理論來分析各系統是否有機會成為全方位介電質反射鏡。

##### ■ 折射率對比較小的系統 (System of small refraction index contrast)

我們首先研究了聚苯乙烯(polystyrene, PS)及聚甲基丙烯酸甲酯(PMMA)組成的介電質反射鏡，兩者的折射率依序別為  $n_1=1.6$  及  $n_2=1.48$ ，對比為 1.08，系統填充率為 0.5 [11]。

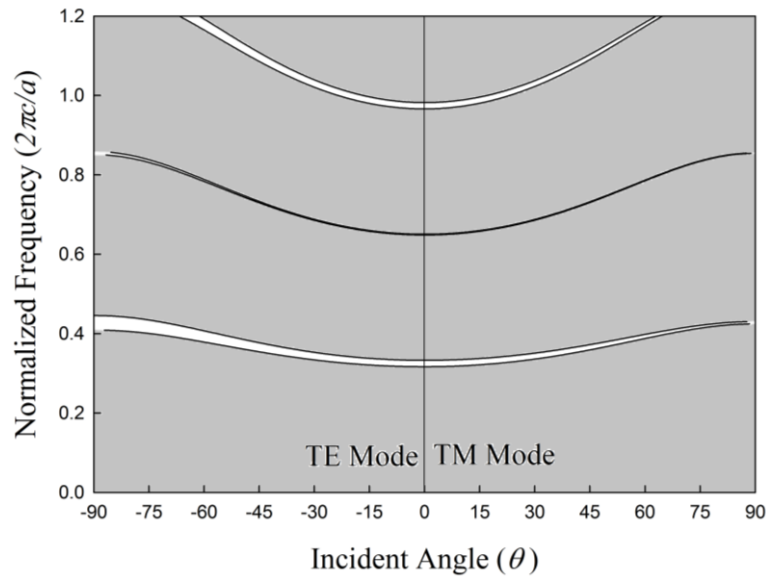
為了了解不同頻率的入射光在各方向的傳遞狀況，我們計算了能帶結構隨  $k_y$  的變化。圖三為此系統在  $k_y$  方向上的投射能帶結構(projected band structures)，橫軸為波向量平行界面的分量，縱軸為歸一化頻率。白色部分代表沒有態存在的區域，灰色代表能帶區域，粗實線為布魯斯特線，虛線為光線，左右分別對應 TE 和 TM 模，其中 TM 模中有布魯斯特線，且在此角度下會完全透射，因此能隙在布魯斯特線上都是閉合狀態。 $k_y=0$  代表光為垂直入射，由下往上灰色區域之間的狹長白色區域依序對應到  $k_y/G_x=0.5、1.5、2.5、\dots$  的能隙。根據(13)式，光子晶體之外的光只存在於兩條光線所夾的範圍內，所以我們只需關注光線內的能帶結構即可。

圖三的能帶結構圖顯示此系統的布魯斯特線位於光線之外，而將系統參數代入(18)計算單層膜的布魯斯特角與最大入射角，亦得到  $\theta_B = 42.8^\circ > \theta_{\max} = 38.7^\circ$ ，因此對此 PS-PMMA 系統而言，入射光沒有布魯斯特角的顧慮，但由於系統的折射率對比太小導致能隙非常狹窄，光線之內並不存在 TE 及 TM 模共同具有能隙的波段，因此沒有全方位能隙。



圖三、PS-PMMA 系統的投射光子能帶結構， $n_1/n_2 = 1.6/1.48 = 1.08$ ，填充率為 0.500 [11]。白色及灰色分別代表能隙及能帶區域，粗實線為布魯斯特線，虛線為光線。

借等效折射率模型之助，我們利用(21)式將圖三的投射能帶結構轉換成圖四的角度能帶結構，此處是對外界入射角作圖。白色及灰色同樣地分別代表能隙及能帶區域，左右亦分別對應 TE 和 TM 模，而光線對應到  $90^\circ$  鉛直線(未特別作圖)。此例由於布魯斯特線被排除在光線之外，故圖中不存在。從圖四中我們可以發現，能隙都很窄，但在 TE 模中比在 TM 模中略寬，情形與圖三類似，且因避開了布魯斯特角，沒有能隙閉合的問題。但因為折射率對比太小，不存在兩種模態共同的能隙，因此沒有全方位反射的特性。

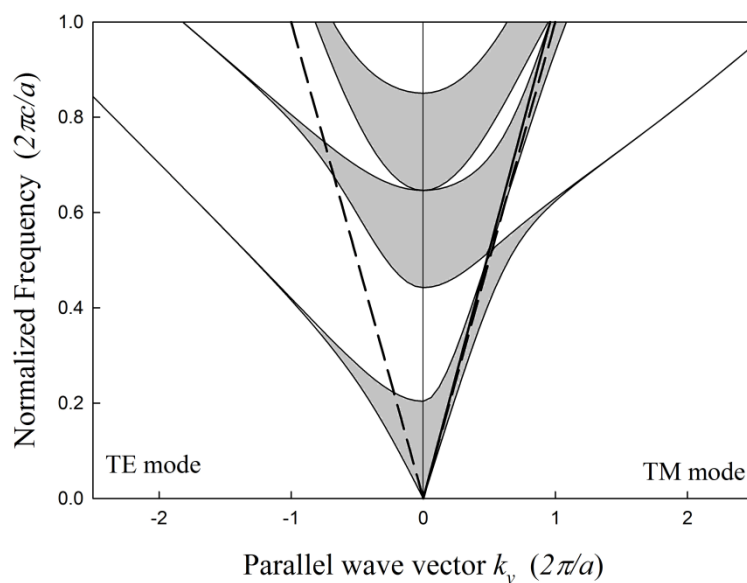


圖四、PS-PMMA 系統的角度能帶結構， $n_1/n_2=1.6/1.48=1.08$ ，填充率 0.500 [11]。白色及灰色分別代表能隙及能帶區域。

■ 折射率對比較大的系統 (Systems of large dielectric contrast)

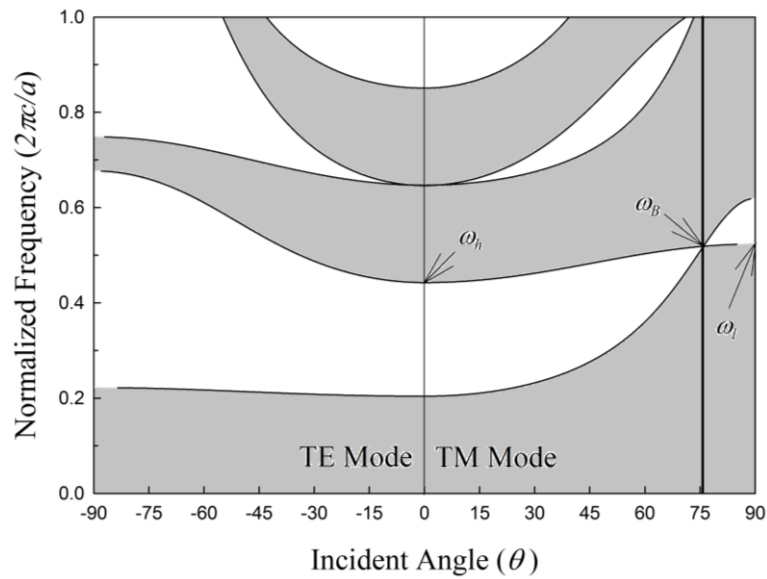
從上例可知，即使系統滿足  $\theta_{max} < \theta_B$  的條件，即將布魯斯特線排除在光線之外，若介電材料折射率對比不夠大，則能隙會不夠寬，依舊不可能得到全方位能隙。因此，折射率對比夠大也是全方位介電質反射鏡的條件之一。

接下來我們計算矽( $n_1=3.42$ )與空氣( $n_2=1.0$ )組成的系統，材料折射率對比為 3.42，填充率為 0.226 [12]。圖五為其  $k_y$  方向上的投射能帶結構圖，白色與灰色分別對應能隙與能帶區域，粗實線為布魯斯特線，虛線為光線。從圖五中可以發現，增加系統的折射率對比，能隙的寬高比(midgap ratio)也會增加，這是因為結構係數跟著變大的緣故，然而此例中布魯斯特線卻以些微之差仍然落在光線之內，(18)式的計算結果亦顯示  $\theta_B=16.3^\circ < \theta_{max}=17^\circ$ ，說明 TM 模的能隙會在光線之內就發生閉合，因此該還是沒有全方位能隙存在。



圖五、矽-空氣系統的投射光子能帶結構， $n_1/n_2=3.42/1.0=3.42$ ，填充率 0.226 [12]。白色及灰色分別代表能隙及能帶區域，粗黑線為布魯斯特線，虛線為光線。

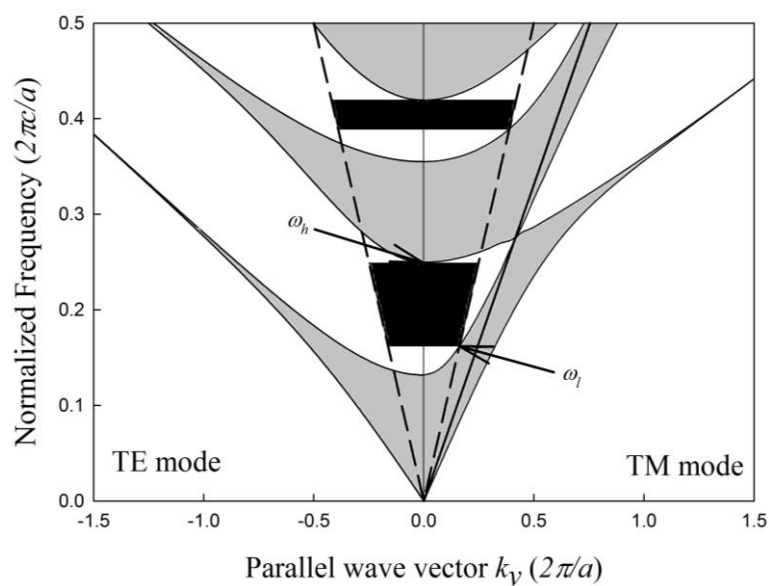
我們同樣透過等效折射率模型，將圖五的投射能帶結構圖轉換成圖六的角度能帶結構圖。從圖六中可以發現，TE 模在歸一化頻率約 0.22 至 0.44 之間有一個從  $0^\circ$  一直延伸到  $90^\circ$  的共同能隙，而 TM 模的能隙卻在  $75.8^\circ$  即因布魯斯特角而閉合。由上述結果可知，雖然折射率對比變大可以獲得較寬的能隙， $0\sim 60^\circ$  的範圍內能隙的寬高比(midgap ratio)甚至可達 30%，但因未將布魯斯特線排除在光線之外，還是沒有全方位能隙存在。



圖六、砂-空氣系統的角度能帶結構， $n_1/n_2=3.42/1.0=3.42$ ，填充率 0.226。白色及灰色分別代表能隙及能帶區域，粗黑線為布魯斯特線，

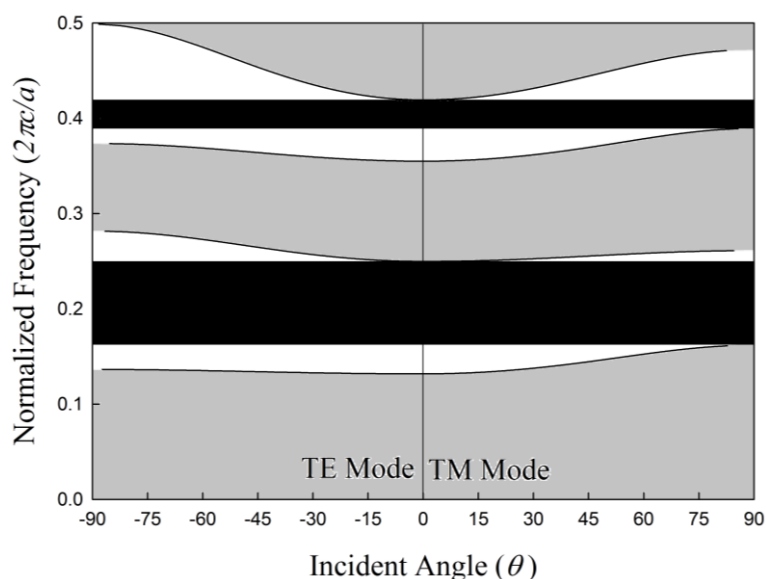
最後我們計算碲( $n_1=4.6$ )及聚苯乙烯( $n_2=1.6$ )組成的系統，填充率為 0.33 [6]。從圖七的投射能帶結構中可看出，雖然折射率對比略小於第二例的砂-空氣系統，但比值 2.88 仍比第一例的 PS-PMMA 系統大許多，因此能隙區域仍有一定寬度，而且布魯斯特線明顯排除在光線之外，符合(18)式的計算預測( $\theta_B=19.2^\circ < \theta_{\max}=12.6^\circ$ )，代表入射光不會受到布魯斯特角的影響，再加上  $n_1$  和  $n_0$  的比值足夠大到使  $\omega_h$  高於  $\omega_l$ ，因此在光線之內存在一個 TE 與 TM 模共用的全方位能隙(圖中以黑色標示)，此波段範圍內的電磁波以任何角度入射，都會因遭遇能隙而反射，因此滿足全方位介電質反射鏡的條件。





圖七、碲-聚苯乙烯反射鏡的投射光子能帶結構， $n_1/n_2=4.6/1.6=2.88$ ，系統填充率=0.330 [6]。白色及灰色分別代表能隙及能帶，黑色部分為全方位能隙，粗黑線為布魯斯特線，虛線為光線。

我們同樣利用等效折射率模型將圖七的投射能帶結構轉換成角度能帶結構，如圖八所示。由於布魯斯特線落在光線之外，圖八中並不存在布魯斯特角，而且兩條光線間的 TE 及 TM 模在歸一化頻率為 0.15 ~ 0.25 和 0.38 ~ 0.42 內有共同能隙(黑色區域)，對應的寬高比分別為 50% 及 10%。此即全方位能隙的出現證明了此碲-聚苯乙烯系統具備了全方位反射的特性。



圖八、碲-聚苯乙烯反射鏡的角度能帶結構， $n_1/n_2=4.6/1.6=2.88$ ，系統填充率=0.330 [6]。白色及灰色分別代表能隙及能帶，黑色部分為全方位能隙。

為了釐清全方位能隙存在的條件，我們必須進一步討論能帶結構圖中的三個關鍵頻率 $\omega_h$ 、 $\omega_l$ 及 $\omega_B$ ，其中 $\omega_h$ 為第二能帶的最低點(對應 $k_y=0$ )的頻率， $\omega_l$ 為光線與第一能帶相交點的頻率，而 $\omega_B$ 布魯斯特線與第一、二能帶相交的頻率，即 TM 能隙閉合處。值得注意的是， $\omega_h$ 與 $\omega_B$ 為光子晶體本身的特性，是由 $n_1/n_2$ 來決定，而 $\omega_l$ 則關係到光子晶體與外界介面，與 $n_0/n_1$ 的大小有關。

由於能帶會隨著 $k_y$ 增加而向上彎曲， $\omega_B$ 與 $\omega_h$ 又同屬於第二能帶，所以不論系統折射率對比為何， $\omega_B$ 必然大於 $\omega_h$ 。若布魯斯特線在光線之內(如圖五)，則 $\omega_B$ 小於 $\omega_l$ ，我們可以推得 $\omega_h < \omega_l$ ，亦即在光線範圍內第二能帶的最低點比第一能帶的最高點還低，因此系統一定沒有全方位能隙。

相反的，若布魯斯特線在光線之外，則 $\omega_B > \omega_l$ ，但這並不能保證 $\omega_h > \omega_l$ 。由圖七可知，光線的斜率越大，與第一能帶的交點越低， $\omega_l$ 就越小，而根據(13)式，光線的斜率與外界折射率 $n_0$ 成反比，因此 $n_0$ 越小，越有可能滿足 $\omega_h > \omega_l$ 而得到全方位能隙，這點符合(15)式的預測。

總之，要設計一個全方位介電質反射鏡，材料的折射率對比 $n_1/n_2$ 要大，才能開啟足夠寬的能隙，同時反射鏡與外界介面兩側的折射率對比 $n_1/n_0$ 也要夠大，讓布魯斯特線落在光線之外且兩者盡量遠離，才有可能得到全方位能隙。

## 五、結論(Conclusion)

我們利用平面波展開法計算二維光子晶體，得到介電質反射鏡的投射能帶結構，並利用等效折射率模型將傳統的能帶結構轉換成角度能帶結構，以研究光子能隙隨外界入射角變化的情形。

我們分別計算了 PS-PMMA、矽-空氣及碲-聚苯乙烯組成的介電質反射鏡，發現 PS-PMMA 系統因為折射率對比太小，無法開啟足夠寬的光子能隙；矽-空氣系統雖然因折射率對比夠大而有相當寬的能隙，但 TM 模因布魯斯特角作祟導致能系閉合，只有碲-聚苯乙烯有夠寬的能隙，又免除布魯斯特角的威脅，所以具有全方位能隙。

我們根據理論及計算結果，歸納整理出全方位介電質反射鏡的兩個條件：(1)介電材料的折射率對比 $n_1/n_2$ 要大，以便開啟足夠寬的光子能隙；(2)反射鏡與外界介面兩側的折射率對比 $n_1/n_0$ 也要夠大，才能將布魯斯特線徹底排除在光線之外。

此研究成果提供了一套更直觀的計算及分析方法，可協助實驗者評估及優化介電質反射鏡的性能，並建立了設計全方位介電質反射鏡時選擇參數的基本準則。



## 參考文獻

- [1] K. W.-K. Shung and Y.-C. Tsai, *Phys. Rev. B* **48**, 11265 (1993).
- [2] <https://pansci.asia/archives/32942>
- [3] Thomas F. Krauss and Richard M. De La Rue, *Progress in Quantum Electronics* **23** 51-96 (1999)
- [4] K. M. Ho *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152 (1990)
- [5] Pochi Yeh, *Optical wave in layered media* ch6 (Wiley, New York, 2005).
- [6] Yoel Fink *et al.*, *Science* **281**, 1679 (1998).
- [7] S. G. Johnson *et al.*, "Low-loss asymptotically single-mode propagation in large-core OmniGuide fibers," *Opt. Express* **9**, 748 (2001)
- [8] Kazuaki Sakoda, *Optical properties of Photonic Crystals* (Springer 2001).
- [9] Charles Kittel, "Introduction to Solid State Physics" (Wiley, 1996)
- [10] 透過[5]的公式  $\beta = \frac{\omega}{c} n_2 \sin \theta_B$  以及  $\tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}$  推導而出
- [11] B. Gauvreau *et al* *Optics Express* **16**. 5677-93 (2008)
- [12] V. A. Tomachev *et al.*, *J. Appl. Phys.* **104**, 033536 (2008).
- [13] J. B. Pendry and A. Mackinnon, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2638 (1992)
- [14] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve and S. Fan, *Solid State Commu.* **102**, 165 (1997)