靴帶抽樣預測績效檢定量

叢清全[*]　李政峰[†]　郭炳伸[‡]

2004.4

摘要

比較樣本外預測績效, 有助於研究者選擇適當的模型設定或預測方法。評估預測績效的標準可從預測準確性或預測涵蓋性兩方面爲之。叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 提出一種新的計算程序, 它不僅可用於建立上述兩種檢定量, 同時具有計算簡單的優點, 稱之爲 $AR-t_c$ 統計量。其做法是利用最小平方法估計一個含截距項的 AR 模型, 並以傳統的 t 統計量檢驗截距項是否顯著異於零。在大樣本下, 此檢定統計量仍爲標準常態分配。但在樣本外預測個數不多時, 隨預測期間的增長, $AR-t_c$ 與上述兩種檢定量皆存在型一誤差扭曲的問題。本文延續這個主題, 提出一種靴帶重複抽樣程序用以估計 $AR-t_c$ 統計量的小樣本分配, 並以此分配作爲檢定的基礎, 冀以改善型一誤差偏誤的問題。本文在理論上的貢獻爲, 提供此程序的漸近一致性。亦即, 證明該靴帶反覆抽樣極限分配同樣爲標準常態。由模擬結果顯示, 這種程序, 一如預期, 可以有效改善統計量的錯誤拒絕比率, 同時具有不錯的檢力表現。

JEL 分類代號: C22, C52, E32, E37

關鍵字: 預測準確性檢定, 預測涵蓋檢定, 過濾靴帶反覆抽樣。

[*]通訊作者; 地址: 國立暨南大學經濟系, 南投縣埔里鎮545大學路1號, Tel: (049) 2910960 ext. 4920, Fax: (049) 2914435, Email: canny227@ms17.hinet.net。

[†]國立屏東商業技術學院國際貿易學系, 屏東市900民生東路51號, Tel: (08) 7238700 ext. 6116, Fax: (08) 7238851, Email: jflee@npic.edu.tw。

[‡]國立政治大學國際貿易學系, 台北市文山區116指南路二段64號, Tel: (02) 29393091 ext. 81029, Fax: (02) 29387699, Email: bsku@nccu.edu.tw。

第五屆全國實證經濟學論文研討會
The 5th Annual Conference of Taiwan's Economic Empirics

1 研究動機與目的

預測一直是計量經濟學家關注的焦點。它除了可用來推測經濟或金融變數未來走勢外,同時也是檢驗經濟理論與判斷計量模型優劣的標準之一。一個適當評估預測績效的準則與嚴謹的推論程序便益顯重要。

在早期, 大多數的實證研究皆透過樣本外預測, 以預測均方差 (mean square prediction error, MSPE), 平均絕對誤差 (mean absolute error, MAE) 準則挑選適當的預測模型。例如: Meese and Rogoff (1983) 在匯率預測中, 採用 MSPE 比較模型的預測績效。Akgiray (1989) 利用 MAE 評估股票報酬變異 (volatility) 預測值。Swanson and White (1995) 報導 SIC(Schwarz information criterion) 與樣本外 R^2, 據以探討遠期利率是否可以預測未來即期利率。Engel (1994) 則報導準確預測匯率變化的次數。

上述方法最大的問題在於: 無論是 MSPE 或是 MAE 皆爲「隨機變數」, 我們不能直接由它們的一組估計值 (estimate) 的大小來判定預測模型的優劣。理論上至少應該導出它們的大樣本分配, 再以統計推論的方式進行假設檢定。在這種背景下, 孕育出兩種評估模型預測績效的檢定程序, 其一是由 Diebold and Mariano (1995) 所提出的預測準確檢定量 (以 DM 表示), 用以檢定兩個模型預測均方差或其他經濟損失函數 (economic loss function) 是否相等。第二種評估方法是由預測涵蓋 (forecast encompassing) 的觀點來評斷模型優劣。亦即, 判斷包含在對手模型中 (competing model) 的特定訊息是否有助於提昇預測績效 (Chong and Hendry, 1986 、Clements and Hendry, 1993)。

另一方面, 叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 提出一個新的檢定程序, 稱之爲 $AR-t_c$ 檢定量。簡言之, 此程序先以 AIC 挑選一個含有截距項的 AR 模型, 再以最小平方法 (least squares, LS) 估計體系中的參數, 最後以傳統的 t 統計量檢驗截距項是否顯著異於零。這種程序不僅可以同時用來建立預測準確性與預測涵蓋性檢定, 同時具有概念簡單與操作容易的優點。另一方面, 也不會發生類似 DM 與涵蓋檢定以無母數估計長期

變異數時, 對核函數 (kernel) 不穩健的問題 (Clark, 1999)。

雖然上述三種程序皆以嚴謹的統計方法判斷模型預測績效的優劣, 但是 Harvey et al. (1997, 1998) 以模擬分析發現: 當樣本外預測個數不多時, 上述前兩種檢定量皆會產生嚴重的型一誤差扭曲。另一方面, 隨預測期間 (forecast horizon) 增長, 型一誤差扭曲的現象越嚴重。同時叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 的模擬結果也顯示, 在大部分的情況下 $AR-t_c$ 型一誤差表現優於預測準確性與預測涵蓋性檢定, 但在上述情形下亦存在型一誤差扭曲的問題。這意味在上述情況下, 若檢定量拒絕虛無假設, 我們無從判定究竟是因為兩個模型的預測準確差異性, 或是由檢定量嚴重型一誤差扭曲所造成。這將使上述檢定量的實用性大打折扣。因此, 若想要得到較正確的統計推論, 至少應採用具有穩健 (robust) 型一誤差表現的檢定量進行假設檢定。

本文延續叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 的研究, 擬提出一種「過濾靴帶反覆抽樣」程序 (sieve bootstrap), 企圖改善 $AR-t_c$ 檢定量的小樣本型一誤差偏誤。由於 $AR-t_c$ 的檢定程序可同時用於建立預測準確性與預測涵蓋性檢定, 也可以避免挑選核函數的問題, 且小樣本型一誤差優於後兩者。以直覺而言, 由 $AR-t_c$ 檢定量出發, 以便改善預測準確性與預測涵蓋性檢定的型一誤差扭曲似乎更具可行性。另一方面, 過濾靴帶抽樣程序是以「階次隨樣本數增加」的 AR(p) 模型近似一般的線性過程 (linear process) [1], 並以 LS 估計 AR(p) 中所有的未知參數, 再重建檢定量的小樣本分配, 最後以此分配進行假設檢定。因此, 對大部分的共變異恆定過程, 例如有限階次的 ARMA, 即可用上述 AR(p) 加以近似。值得一提的是, 在 $AR-t_c$ 的建構程序中, 也是以 AR 過程近似數列的序列相關, 這正好與過濾靴帶反覆抽樣具有相同的數學結構。基於上述理由, 很自然地, 本文便採用過濾靴帶反覆抽樣改善 $AR-t_c$ 檢定量型一誤差扭曲。

根據 Horowitz (2000) 的論點, 文獻中常用於處理序列相關的靴帶抽樣法尚有: 參數化靴帶反覆抽樣 (parametric bootstrap, PB) 與移動區塊靴帶抽樣法 (moving blocks

[1] 根據 Bühlmann (1997), p.124的說明, 這種重複抽樣方式與區塊抽樣法同為無母數抽樣法。

bootstrap, MBB)。前者先將資料配適一個適當的模型 (通常爲 ARMA 模型), 估計模型中所有未知參數後再進行重建; 其結果不僅對模型的設定非常敏感, 同時它牽涉到小樣本下非線性估計, 由於參數估計不準確進而影響抽樣的結果。此外, MBB 將觀察值分成幾個區塊, 藉由隨機抽取區塊建立抽樣樣本。雖然沒有前者模型誤設的問題, 卻可能由於抽樣程序中, 忽略了區塊間的相關性, 導致重建後的數列爲非恆定。令人遺憾的是, 它對區塊長度的選擇非常敏感, 且文獻中亦無一致的方法選擇區塊長度。因爲 DM 與預測涵蓋性檢定對核函數不具穩健性, 且由以上的討論可以知道, 過濾靴帶反覆抽樣法是以 AR(∞) 近似 ARMA, 因此比 PB 更一般化, 而且沒有非線性估計的問題, 表現相對穩定, 同時它亦沒有上述 MBB 的缺點。這些正是本文採用過濾靴帶反覆抽樣法而不使用 PB 與 MBB 的原因。

本文所提出的過濾靴帶抽樣法, 不僅在操作上簡易方便, 在理論上更要符合一致性 (bootstrap consistency) 的嚴謹要求。任何靴帶抽樣程序所面臨的重要理論問題在於: 隨著樣本數增加, 靴帶抽樣檢定量大樣本分配是否收斂到對應的漸近分配 (asymptotic distribution) [2]? 這是靴帶抽樣程序是否正確的關鍵所在。因爲一般而言, 我們並不知道檢定量小樣本分配, 研究者可用漸近分配或靴帶分配 (bootstrap distribution) 近似它。因爲靴帶分配可視爲檢定量小樣本分配的估計式, 自然必須要求靴帶分配具有一致性。若在大樣本下, 檢定量的靴帶分配不同於其漸近分配, 此時使用靴帶抽樣檢定量進行假設檢定, 自然無法獲得正確的結果。這隱含此靴帶抽樣程序並不恰當。

在 AR 的環境下, 靴帶抽樣檢定量的漸近行爲並不如一般想像單純。事實上, Basawa et. al. (1989) 曾證明, 在發散 AR(1) 模型設定下, 靴帶反覆抽樣簡單迴歸估計式的大樣本分配會收斂到其漸近分配。另外, Basawa et. al. (1991a) 證明, 在單根模型設定下, 即使干擾項爲常態, 靴帶抽樣簡單迴歸估計式大樣本分配不同於其漸近分配。但是在另一篇文章中 (Basawa et al., 1991b), 他們提出另一種重覆抽樣程序, 並證明適用於上述的設定。這表示除非能證明其正確性, 否則靴帶抽樣法將有誤用的情況發生。我

[2]根據 Nankervis and Savin (1996) 的定義, 使用漸近臨界值進行檢定稱爲漸近理論檢定量 (asymptotic test), 以重建後分配計算臨界值進行檢定稱爲靴帶抽樣檢定量 (bootstrap test)。

們以 Bühlmann (1997) 與 Park (2002) 爲基礎, 導出以 AR 程序所建立的過濾靴帶檢定量漸近分配。該分配與對應之漸近理論檢定量的大樣本分配相同, 皆爲標準常態。這足以證明該程序的正確性。

我們的模擬分析完全符合我們的建構目的。由模擬結果發現, 在預測誤差來自齊質性, 在大樣本下, 本文的過濾靴帶檢定量與預測準確檢定, 預測涵蓋檢定, $AR-t_c$ 三者的型一誤差都接近事先給定的名目顯著水準。這表示過濾靴帶抽樣檢定量與上述三種檢定量具有相同的漸近分配, 可以視爲本文靴帶抽樣檢定一致性的一項數值證據。但更具實務意義的是, 在實證常見的樣本外預測個數下 (例如: $n = 16, 32, 64$), 特別是在往前預測期數增加時, 本文的靴帶抽樣程序可以有效改善 $AR-t_c$ 檢定量的型一誤差偏誤, 使之型一誤差相當接近於名目的水準。在調整後檢力方面, 過濾靴帶抽樣檢定量與其他三個檢定量具有類似的表現型態。因爲 $AR-t_c$ 檢定量可用來建立 DM 與預測涵蓋檢定, 配合過濾靴帶抽樣程序, 具有更穩健的型一誤差表現, 因此對預測的實證研究具有相當大的幫助。

文章的安排如下, 第二節爲預測績效評估檢定的回顧; 第三節爲過濾靴帶抽樣程序及其漸近分配; 第四節爲模擬分析, 最後一節爲結論。在底下的分析中, $*$ 表示靴帶抽樣樣本, $(\Omega^*, \Im^*, P^*)$ 表示條件在一組樣本下的靴帶機率空間(bootstrap probability space), E^*, $\xrightarrow{p^*}$, $\xrightarrow{d^*}$ 分別表示對應 P^* 的期望值, 機率收斂與分配收斂。數學證明載於附錄。

2 預測檢定的回顧

爲求本文的連貫性, 在本節我們概略性的回顧上述三種評估預測績效檢定量, 包括: 預測準確性檢定, 預測涵蓋性檢定與 $AR-t_c$ 檢定量。另外, 也扼要說明文獻中對這些檢定量的批評。

2．1 預測準確性檢定

已知變數 y_t 的兩組預測值, 研究者通常關心兩組預測值準確性的比較。Diebold and Mariano (1995)(以下簡稱 DM) 首先提出統計推論的架構, 以評估兩組預測值的差異是否來自於統計的抽樣誤差。假設 $(e_{1t}, e_{2t}), t = 1, 2, ..., n$, 分別表示模型 1 與模型 2 往前 h 期 (h-step) 的預測誤差。DM的評估方式是比較這兩組預測誤差的損失函數 $g(e_{it})$ (loss function) 的平均數是否相等。因此, 預測準確性檢定的虛無假設爲:

$$H_0 : E\left[g(e_{1t}) - g(e_{2t})\right] \;=\; 0 \text{ 或 } E\left[d_t\right] = 0 \tag{1}$$

而對立假設爲 $E[d_t] \neq 0$, 此處, $d_t = g(e_{1t}) - g(e_{2t})$ 代表損失差異 (loss differential)。雖然損失函數 $g(e_{it})$ 的設定方式非常多, 視研究者的議題而定。在此, 本文依循許多實證文獻的做法, 以預測均方差 (MSPE) 來衡量損失。亦即, 令 $g(e_{it}) = e_{it}^2$, 此時損失差異爲 $d_t = e_{1t}^2 - e_{2t}^2$ =MSPE_1 - MSPE_2。

由 (1) 可知, 我們要檢定 d_t 的母體平均數是否爲零。與一般的統計推論類似, 以 d_t 的樣本平均數 ($\overline{d}$) 作爲檢定 (1) 的檢定量。因此, DM的檢定統計量型式如下:

$$DM = \frac{\overline{d}}{\sqrt{Var(\overline{d})}} \tag{2}$$

此處,Var($\overline{d}$) 爲長期變異數 (long-run variance) 的一致性估計式 (consistent estimator)。因爲往前 h 期預測誤差具有 $(h-1)$ 階序列相關 [3], 因此, 當 $h > 1$ 時, 數列 d_t 將存在自我相關 (autocorrelation) 的現象。爲處理這個問題, DM 採用無母數的估計方法以獲得長期變異數 (long-run variance) 的一致估計式。如上所述, 在往前 h 期的預測誤差中, 大於或等於 h 階的自我相關變異數皆爲零, 因此, 他們採用均勻核函數 (uniform kernel) 並設定帶寬 (bandwidth) 長度爲 $(h-1)$ 來計算長期變異數的估計值。亦即, $\text{Var}(\overline{d}) = \frac{1}{n}\sum_{k=-(h-1)}^{h-1}\widehat{\gamma}_k$, 其中, $\widehat{\gamma}_k$ 表示 d_t 的第 k 階樣本自我共變異數。DM證明, 在 (1) 式的虛無假設下, 此統計量爲漸近標準常態分配。

[3]其中一種可能爲 $(h-1)$ 階移動平均過程 (MA($h-1$))。

即使 DM 檢定量爲漸近標準常態分配, 但 Harvey et al. (1997, 1998) 的模擬結果顯示: 在樣本外預測個數 (n) 不多的情況下, 由於長期變異數估計不準確, 導致漸近分配無法有效近似 DM 檢定量小樣本分配, 導致該檢定量產生嚴重的型一誤差扭曲。特別地, 隨 h 增加, 型一誤差扭曲更形嚴重。這表示在上述情況下, 若 DM 檢定量拒絕虛無假設, 我們無從得知此結果是來自於型一誤差扭曲, 或是來自於預測損失差異性。這將使該檢定量的實用性大打折扣。本文將在稍後以過濾靴帶抽樣法改善這個問題, 並證明此程序的正確性。

2．2　預測涵蓋性檢定

另外一種評估預測績效的方法爲預測涵蓋性檢定。觀念上, 預測涵蓋檢定欲決定的是, 目前模型的預測值是否包含競爭模型中的所有相關訊息。若我們有興趣的模型包含所有相關的訊息, 則沒有必要與競爭模型形成組合預測。因此, 研究者可以從預測訊息的角度來評估預測模型的好壞。預測涵蓋性檢定除了可以判斷競爭模型是否含有對預測有用的額外訊息以外, 它也可以當作預測準確性檢定的輔助檢定。

預測涵蓋檢定的觀念建立在組合預測之上。令 y_t 爲可觀測的數列, (f_{1t}, f_{2t}) 分別是模型1與2所產生的兩組預測值, 且模型1爲研究者喜愛的模型, 而模型2爲其競爭模型。今將兩組預測值加權平均, 形成組合預測值 f_{ct} 如下,

$$f_{ct} = (1-\lambda)f_{1t} + \lambda f_{2t} \qquad\qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{3}$$

此處, λ 爲權數。通常, 具有較小誤差變異數的預測值應該給予較高的權數, 因此, 若 $\lambda \to 0$, 表示預測值 f_{1t} 較爲準確, 有較小的預測誤差變異數; 反之, 則表示 f_{2t} 較準確。若權數介於0與1之間, 則可透過組合預測, 得到優於原先預測值的結果。因此, 透過權數 λ 的估計與檢定, 即可判斷是否有形成組合預測的必要。

爲說明如何估計 λ, 令 $e_{it} = y_t - f_{it}, i = 1, 2$ 表示 y_t 的兩組預測誤差, ε_t 爲組合預

測值的誤差, 則(3) 式可改寫成,

$$\varepsilon_t = y_t - f_{ct} = e_{1t} + \lambda(f_{1t} - f_{2t}) \tag{4}$$

改寫 (4) 式如下:

$$e_{1t} = \lambda\left(f_{2t} - f_{1t}\right) + \varepsilon_t \tag{5}$$

在此, 權數 λ 可解釋成, 模型 2 與模型 1 預測值差距對模型 1 的預測誤差的解釋能力。若 $\lambda = 0$, 表示模型 2 的額外訊息對於解釋模型 1 的預測誤差並無幫助。亦即, 模型 1 包含模型 2 的訊息。若 $\lambda > 0$, 則表示模型 2 的額外訊息可以解釋模型 1 的預測誤差, 亦即, 模型 1 未完全包含模型 2 的所有訊息。因此, 預測涵蓋統計量即在檢定 λ 等於零的虛無假設是否成立, 對應之對立假設爲 $\lambda > 0$。

爲方便估計 λ, 將 (5) 式改寫成,

$$e_{1t} = \lambda(e_{1t} - e_{2t}) + \varepsilon_t \tag{6}$$

若 $\lambda = 0$ 的虛無假設成立, Chong and Hendry (1986) 與 Clements and Hendry (1993) 稱此種情況爲「f_{1t} 涵蓋 f_{2t}」。

因爲 (6) 式中的 ε_t 可能會有序列相關, 因此Harvey, Leybourne and Newbold (1998)(以下簡稱 HLN) 建議, 以 DM 的方法來形成預測涵蓋檢定量。令 $d_t = e_{1t}(e_{1t} - e_{2t})$, 如 HLN 所述, 若 f_{1t} 涵蓋 f_{2t}, 則 $E[d_t] = 0$, 爲檢定的虛無假設, 而對立假設爲 $E[d_t] > 0$, 表示 f_{2t} 包含有用的訊息。HLN 的預測涵蓋檢定量如下,

$$ENC = \frac{\overline{d}}{\sqrt{Var(\overline{d})}} \tag{7}$$

式中, 一如在 DM 檢定中的定義, $\bar{d}$ 爲 d_t 之樣本平均數, $\mathrm{Var}(\overline{d})$ 爲長期變異數之一致性估計式, 其計算方式與 DM 統計量相同。HLN 證明在虛無假設下, 檢定量爲漸近標準常態分配。與 DM 檢定量類似, 在樣本外預測個數 n 不多, 或隨預測期間 h 增加, ENC 將產生嚴重的型一誤差扭曲。

2．3　自我迴歸的檢定程序

在本節, 我們扼要說明, 叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 如何利用自我迴歸來計算預測績效評估統計量 ((2) 式與 (7) 式)。爲了更清楚了解自我迴歸的檢定程序, 我們先以一個簡單的例子闡述該檢定程序的基本精神。假設 $d_t = c + \eta_t$, η_t 爲 IID$(0,\sigma_\eta^2)$, $t = 1, 2, \cdots, n$。由以上2-1節與2-2節的討論可以發現, 不管是預測準確性檢定或是預測涵蓋性檢定, 都在檢定 d_t 的母體平均數是否爲零[4]。因此在上述假設下, 檢定 d_t 的母體平均數是否爲零相當於檢定 $H_0 : c = 0$。根據簡單的計量理論, 我們只需將 d_t 對常數項迴歸後, 以傳統 t 統計量進行檢定, 此時 t 統計量爲漸近標準常態分配。

在更一般化的情況, 若 d_t 存在自我相關, 一如 ADF 單根檢定量的建構程序, 很自然地可採用 AR 過程修正其序列相關。再利用 LS 估計參數, 並以 t 檢定量檢驗截距項是否顯著異於零。亦即先以 AIC 選擇適當的階次 p, 再以 AR(p) 模型配適 d_t 如下:

$$d_t \;=\; c + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{p,k} d_{t-k} + \epsilon_{p,t}, \tag{8}$$

接著透過 LS 估計參數, 並以傳統的 t 統計量檢定 (8) 式中 c 是否顯著異於零即可。由叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 在以下一般的假設下證明, 這種計算程序中 t 統計量依然爲漸近標準常態分配。

假設 1: $d_t = \mu_d + \psi(L)\epsilon_t$, 其中 μ_d 爲常數, 且 $\psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j L^j$, $\pi_0 = 1$ 並具有以下性質:

1. ϵ_t 爲 IID $(0, \sigma^2)$ 的隨機變數且存在 $r \geq 4$ 使得 $E|\epsilon_t|^r < \infty$。

2. 對所有 $|L| \leq 1$, $\psi(L) \neq 0$ 且 存在 $s > 1$ 使得 $\sum_{j=0}^{\infty} j^s |\pi_j| < \infty$。

假設 2: $p = p(n)$ 滿足 $p \to \infty$ 且 $p = o(n^\kappa)$, 其中 $\kappa < 1/2$.

[4]在預測準確性檢定與預測涵蓋性檢定下 d_t 分別爲 $e_{1t}^2 - e_{2t}^2$ 與 $e_{1t}(e_{1t} - e_{2t})$。

定理 1: (叢清全、李政峰與郭炳伸, 2003)

令 $\hat{c}$ 與 $SE(\hat{c})$ 分別表示(8) 式中參數 c 的 LS 估計式與標準差。在假設1,2與 (1) 式的虛無假設成立下, 當 $n \longrightarrow \infty$,

$$AR-t_c = \frac{\hat{c}}{SE(\hat{c})} \quad \overset{d}{\longrightarrow} \quad N(0,1) \tag{9}$$

假設1與2值得進一步說明。假設1說明 d_t 是一個非常一般化的恆定過程, 它涵蓋所有有限階次的 ARMA(p,q), 以及絕大部分具有 $(h-1)$ 階序列相關過程。而假設2表示以 AR(p) 近似 d_t 過程時, 要求其階次必須隨樣本數 (n) 增加而增加, 且增長速度必須小於 $n^{1/2}$。但在實際操作上, 假設2並沒有有提供任何方法決定 AR 的階次。即使在文獻中, AIC 與 BIC 常用於挑選模型的適當階次, 但是叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 建議以 AIC 挑選 AR 的階次。這是因爲採用 AIC 準則挑選 AR 的階次會滿足假設2的條件, 以確保定理1的正確性。

綜合以上所討論, 在 $AR-t_c$ 檢定量的實際操作上, 只須以 AIC 挑選適當的階次 p, 並以含截距項的 AR(p) 配適 d_t; 接著以 LS 估計參數後, 再以 t 統計量檢定截距項是否顯著異於零即可。由此可知, $AR-t_c$ 不僅可同時用於建立 DM 與 ENC 檢定量, 其原理簡單易懂, 而且大部分的統計軟體皆有現成程式用以執行上述程序, 因此 $AR-t_c$ 大大增加實證研究的方便性。值得注意的是, DM 與 ENC 是以無母數計算長期變異數, 至少在理論上對異質性具有穩健性 (robust), 而假設1則沒有考慮到異質性的情況。不過在下一節的模擬中, 我們亦考慮異質性的設定, 用以檢驗檢定量的表現。

由叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 的模擬發現, 雖然在大部分的情形, $AR-t_c$ 型一誤差表現優於 DM 與 ENC 檢定量。但在小樣本下依然存在型一誤差扭曲, 且此現象會隨 h 增加更加嚴重。舉例而言, 觀察本文表1-1的模擬結果, 當 $n=64$, $h=1$ 增加到 8 時, $AR-t_c$ 型一誤差由 0.083 逐漸增加到 0.120, 遠超過 0.05 的顯著水準[5]。這些模擬結果與叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 的報導相仿, 皆指出 $AR-t_c$ 可能的型一誤差扭曲現象不容忽視。造成這種現象的原因可能在於小樣本下, 由於參數估計不夠

[5]如何獲得這些結果的模擬設計, 將於第四節詳細介紹。

準確, 進而使標準常態無法有效近似 $AR - t_c$ 的小樣本分配。在下節, 我們擬以過濾靴帶抽樣法改善這個問題。

3 過濾靴帶反覆抽樣檢定

Efron (1979) 首先提出靴帶反覆抽樣法的觀念, 以進行統計推論。靴帶反覆抽樣法是一種重覆抽樣 (resampling) 程序, 用以估計在大部分情況下檢定量的未知小樣本分配。由於靴帶抽樣檢定量 (bootstrap test) 是直接以樣本觀察值爲母體, 再依重複抽樣程序建立靴帶抽樣分配, 相較於大樣本分配的近似方式, 一般而言, 此方法在小樣本時, 將更接近檢定量的小樣本分配, 其型一誤差表現將優於漸近理論檢定量。

我們的過濾靴帶抽樣其實與 $AR - t_c$ 建構精神與做法類似。因爲在過濾靴帶抽樣重建靴帶樣本的過程中, 如同計算 $AR - t_c$ 檢定量一般 (根據式 (8)), 也是以 p 隨樣本數增加的 AR(p) 近似資料產生過程。因爲 $AR - t_c$ 的建立與過濾靴帶抽樣程序兩者具有相同的數學結構, 這正是本文採用過濾靴帶抽樣法改善 $AR-t_c$ 型一誤差的主要原因。

底下, 我們首先提出過濾靴帶抽樣程序的執行步驟及其說明, 接著證明該程序的分配一致性。

1. 假定有一組觀察值 d_t, 在預測準確性與預測涵蓋性檢定分別爲: $e_{1t}^2 - e_{2t}^2$ 與 $e_{1t}(e_{1t} - e_{2t})$, 採用 LS 估計以下 AR(p) 模型, 其中 p 由 AIC 所決定:

$$d_t = c + \alpha_{p,1} d_{t-1} + \alpha_{p,2} d_{t-2} + \cdots + \alpha_{p,p} d_{t-p} + \epsilon_{p,t}$$

   並計算 $AR - t_c$ 檢定量的值。

2. 以 LS 估計以下 AR 模型:

$$d_t = \hat{\alpha}_{p,1} d_{t-1} + \hat{\alpha}_{p,2} d_{t-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{p,p} d_{t-p} + \hat{\epsilon}_{p,t} \tag{10}$$

3. 從以下的實證分配 (empirical distribution) 隨機抽取殘差, 得到一組 $\{\epsilon_t^*\}_{t=1}^n$。

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(\hat{\epsilon}_{p,t} - \bar{\epsilon}_n) \tag{11}$$

上式中, I 爲指標函數 (indicator function), $\bar{\epsilon}_n = 1/n\sum_{t=1}^{n}\hat{\epsilon}_{p,t}$。

4. 利用 $\{\epsilon_t^*\}_{t=1}^n$ 且依下式進行重建, 獲得一組靴帶抽樣樣本 $\{d_t^*\}_{t=1}^n$:

$$d_t^* = \hat{\alpha}_{p,1}d_{t-1}^* + \hat{\alpha}_{p,2}d_{t-2}^* + \cdots + \hat{\alpha}_{p,p}d_{t-p}^* + \epsilon_t^* \tag{12}$$

5. 以 $\{d_t^*\}_{t=1}^n$ 配適以下 AR(p) 模型, 同時以 LS 進行估計:

$$d_t^* = \hat{c}^* + \hat{\alpha}_{p,1}^*d_{t-1}^* + \hat{\alpha}_{p,2}^*d_{t-2}^* + \cdots + \hat{\alpha}_{p,p}^*d_{t-p}^* + \hat{e}_{p,t}^* \tag{13}$$

其中 $\hat{c}^*$, $\hat{\alpha}_{p,i}^*$, $i = 1, 2, \cdots, p$ 表示其 LS 估計值, $\hat{e}_{p,t}^*$ 表示其殘差。

6. 計算 $AR - t_c^*$ 如下:

$$AR - t_c^* = \frac{\hat{c}^*}{SE(\hat{c}^*)}$$

其中 $SE(\hat{c}^*)$ 爲 $\hat{c}^*$ 的標準差。

7. 重覆步驟 (3) 到 (6) NB 次。

8. 分別以上述 NB 個 $AR - t_c^*$ 的值當作檢定量的分配, 並找出臨界值, 稱爲「靴帶抽樣」臨界值(bootstrap critical value)。比較步驟 (1) 中 $AR - t_c$ 的值與「靴帶抽樣」臨界值, 以檢定虛無假設。

9. 重覆步驟 (1) 到步驟 (8)ND 次, 並計算拒絕虛無假設的次數, 以 NR 表示。

10. 若 d_t 來自於虛無假設, 則 $\frac{NR}{ND}$ 表示靴帶抽樣型一誤差 (bootstrap size), 否則爲靴帶抽樣檢力 (bootstrap power)。

我們接著扼要說明上述步驟的意義。步驟 (2) 的目的是爲了重新產生 d_t 的序列相關結構, 透過估計模型參數後, 方便以下重覆抽樣的工作。步驟 (3) 將迴歸殘差扣除平均數後再抽樣, 目的是在修正自我相關係數估計時常會有的「低估」偏誤 (downward bias) 現象, 同時亦考慮到母體分配具有平均數爲零的性質, 這與(10) 式中加入截距項的作用相同。步驟 (4) 即所謂的重建程序, 目的在產生靴帶抽樣樣本 d_t^*。步驟 (3) 至 (7) 是爲了求出 $AR-t_c^*$ 靴帶抽樣分配的重建程序。值得一提的是, (12) 式的重建過程中是將截距項設爲零, 這是因爲我們是要檢定 $H_0: c=0$ 的虛無假設, 必須建立虛無假設成立下檢定量的分配, 因此將 $c=0$ 的情報納入重建的過程中。比較 $AR-t_c$ 的建構程序 (根據 (8) 式) 與上述過濾靴帶抽樣的重建過程 ((12) 式), 很明顯地, 兩者具有相同的數學結構, 皆以 AR(p) 近似資料的序列相關。這也是本文採用過濾靴帶抽樣改善 $AR-t_c$ 型一誤差的主要原因。至於其他步驟是靴帶抽樣法標準程序, 在此不贅述。

在文獻中, AIC 與 BIC 常用於挑選模型的適當階次, 但在上述過濾靴帶抽樣程序中, 我們建議以 AIC 挑選 AR 的階次。若已知 d_t 是由有限階次的 AR(p) 產生, 根據 An, Chen and Hannan (1982), 使用 BIC 可得到 p 的一致估計式。但事實上, d_t 並非由有限階次的 AR 產生, 在本文中我們是以 AR 近似其資料眞正的產生過程。在此情況下, Shibata (1980) 建議以 AIC 挑選階次比 BIC 更能獲得較適當的階次。

除了過濾靴帶抽樣法, 參數化靴帶反覆抽樣與移動區塊靴帶抽樣同樣是處理時間數列的反覆抽樣法。根據 Horowitz (2000) 的論點, 參數化靴帶反覆抽樣常以 ARMA 近似資料的序列相關, 不僅對模型的設定非常敏感, 而且往往因爲小樣本下, 非線性估計無法獲得準確的參數估計值, 導致重建結果不甚理想。而後者忽略區塊間的相關性, 且重建後的數列具有非恆定的性質。另一方面, 它對區塊長度不具穩健性, 文獻中缺倘乏一致的準則挑選適當的區塊長度。因此, 過濾靴帶抽樣法沒有非線性估計的問題, 同時它亦沒有上述移動區塊靴帶抽樣的缺點。

所有的靴帶抽樣程序, 包括本文的過濾靴帶抽樣法, 都必須滿足一致性的理論要求, 這是靴帶抽樣程序是否正確的關鍵所在。因爲一般而言, 檢定量的小樣本分配未知, 研究者可用漸近分配或靴帶分配近似它。亦即, 靴帶分配是檢定量小樣本分配的估計式, 自然必須要求靴帶分配具有一致性。若在大樣本下, 檢定量的靴帶分配不同於其漸近分配, 此時使用靴帶分配進行假設檢定, 自然無法獲得正確的結果。這表示該靴帶抽樣程序並不正確。

在 AR 的環境下, 靴帶抽樣檢定量的漸近行爲並不如一般想像單純。事實上, Basawa et. al. (1991a) 證明, 在單根模型設定下, 即使干擾項爲常態, 靴帶抽樣簡單迴歸估計式大樣本分配不同於其漸近分配。但是在另一篇文章中 (Basawa et al., 1991b), 他們提出另一種重覆抽樣程序, 並證明適用於上述的設定。這表示除非能證明其正確性, 否則靴帶抽樣法將有誤用的情況發生。底下定理2導出 $AR-t_c^*$ 漸近分配。

定理 2: 在假設1,2與 (1) 式的虛無假設成立下, 當 $n \longrightarrow \infty$,

$$AR-t_c^* \quad \overset{d^*}{\longrightarrow} \quad N(0,1), \quad prob. \tag{14}$$

定理2顯示: 在大樣本下, 靴帶抽樣檢定量 $(AR-t_c^*)$ 與對應的漸近檢定量 $(AR-t_c)$ 具有相同的漸近分配, 亦即, 前者是後者的一致估計。這同時也證明該靴帶抽樣程序正確無誤。

4 模擬分析

4.1 模擬設計

由定理2的結果可知, 利用上述靴帶抽樣程序所得到的 $AR-t_c^*$ 檢定量是 $AR-t_c$ 的一致估計。若以應用的角度而言, $AR-t_c^*$ 的小樣本性質才是實證研究者關心的焦點 。因此在本節, 擬藉由模擬分析技巧, 檢視本文的 $AR-t_c^*$ 檢定量的型一誤差 (size) 與檢力 (power) 表現。我們同時考慮 $AR-t_c$, DM 與 ENC 檢定量, 目的在比較這些檢定

量與 $AR - t_c^*$ 的型一誤差, 方便我們了解 $AR - t_c^*$ 檢定量改善型一誤差的能力。為了與原來的 DM 與 ENC 檢定作比較, 模擬設計仿照 HLN (1997, 1998) 的做法, 並考慮預測誤差具有 GARCH(1,1) 的情況。考慮這種設定方式的理由是, 大部分的財務數列變異數均有短暫群聚與高狹峰的特徵, 而 GARCH(1,1) 是條件異質模型中, 最常用來捕捉上述財務資料的特性。因此, 考慮異質性預測誤差可以檢驗, 當 $AR - t_c^*$ 用於財務資料時, 是否依然具有良好的性質。叢清全、李政峰與郭炳伸 (2003) 即考慮這種設定方式。

模擬的樣本大小 (n) 設定成 $n = 16, 32, 64, 128, 256$, 往前預測期數 (h) 為 h=1,2,...,8, 模擬次數為2000次, 亦即 $ND = 2000$。在靴帶抽樣中, 每一次的模擬均執行 1000 次的靴帶反覆抽樣, 亦即 $NB = 1000$。名目的顯著水準為 5%。大樣本臨界值來自於標準常態分配。預測準確性檢定為雙尾檢定, 而預測涵蓋性檢定為右尾檢定。此外, 在使用 DM 的方法計算預測績效評估統計量, 我們依照 DM 的做法, 使用均勻核函數並將帶寬設為 $h - 1$ 來估計長期變異數; 在計算 $AR - t_c$ 與 $AR - t_c^*$ 時, 將 AR 最大落後階次設定為5階, 再由程式依據最小 AIC 值來決定最適落後階次 p。

預測準確性檢定的資料產生過程 (DGP) 依照 HLN (1997) 的做法。為產生兩組預測誤差 (e_{1t}, e_{2t}), 令其共變異矩陣為 $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, 預測誤差則依下式產生,

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} \tag{15}$$

此處, 為了讓預測誤差具有移動平均 (MA) 與條件異質的特性, 我們讓 v_{it} 由 MA$(h-1)$ 產生。亦即, 在 $h = 2$ 時, 預測誤差由 MA(1) 產生, 在 $h = 3$ 時, 預測誤差由 MA(2) 產生, 以此類推。更精確地說, 將 (15) 式中 v_{it} 設定成:

$$v_{it} = \sum_{l=0}^{h-1} \pi_l \epsilon_{it-l}, \quad i = 1, 2. \ \ h = 1, 2, \cdots, 8. \tag{16}$$

其中 MA 的參數設定成, $(\pi_0,\pi_1,...,\pi_7)' = (1,0.1,-0.1,0.2,-0.2,0.3,-0.3,0.4)'$。同時, 隨機變數 $(\epsilon_{1t},\epsilon_{2t})$ 則依如下方式產生,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix} \overset{iid}{\sim} N\left[0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{1t}|\Psi_{t-1} \\ \epsilon_{2t}|\Psi_{t-1} \end{bmatrix} \sim N\left[0, \begin{pmatrix} h_{1t} & 0 \\ 0 & h_{2t} \end{pmatrix}\right] \tag{17}$$

此處, Ψ_{t-1} 表示 $t-1$ 期之前的訊息集合, 條件變異數 h_{it} 依循 GARCH(1,1) 過程, 設定爲 $h_{it} = 1.5+0.3h_{it-1}+0.2\epsilon^2_{it-1}, i = 1,2$。[6] 因此當 ϵ_{it} 由 $N(0,1)$ 產生, 預測誤差僅具有 MA 的特性, 但仍具有齊質性。另一方面, 當 ϵ_{it} 由 GARCH(1,1) 產生, 此時預測誤差同時具有 MA 與條件異質的特性, 這種設定更符合財務資料的特徵。在計算型一誤差時, $k = 1$, 以符合虛無假設 $E(d_t) = E(e^2_{1t}) - E(e^2_{2t}) = 0$ 的要求; 在計算檢力時, 爲使不同樣本長度的檢力相當, 根據 HLN (1997), k 值應隨樣本大小 $n = 16,...,256$ 調整, 設爲 $k = 2$, 1.5, 1.375, 1.25, 1.1875。以上皆符合對立假設 $E(d_t) = E(e^2_{1t}) - E(e^2_{2t}) < 0$ 的要求。

預測涵蓋檢定的模擬設計根據 HLN (1998) 的作法。爲產生兩組預測誤差 (e_{1t}, e_{2t}), 令其共變異矩陣爲 $R = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & \omega \end{bmatrix}$, 其 Choleski 矩陣爲 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & \sqrt{\omega-\delta^2} \end{bmatrix}$, 預測誤差自下式產生,

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & \sqrt{\omega-\delta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} \tag{18}$$

此處, $[\ v_{1t},\ \ v_{2t}\ ]'$ 的產生方式如同 (16) 式, $\text{cov}(e_{1t}, e_{2t}) = \delta$, $\text{var}(e_{2t}) = \omega > \delta^2$。在計算型一誤差時, $\delta = 1$, 而 ω 值的大小並不影響模擬結果, 故設爲 5。在這樣的設定下, $E\left[e_{1t}\left(e_{1t} - e_{2t}\right)\right] = E\left(e^2_{1t}\right) - E\left(e_{1t}e_{2t}\right) = 0$, 符合虛無假設的要求。在計算檢力時, 令 $\delta = 0.5 < 1$, 但爲使不同樣本長度的檢力相當, 根據 HLN (1998), ω 與 δ 值的設定需滿足式子 $k = \frac{\sqrt{\omega-\delta^2}}{1-\delta}$, 亦即, $\sqrt{\omega-\delta^2} = k(1-\delta)$。$k$ 值配合樣本大小 $n = 16,...,256$ 調整, 設爲 $k = 3$, 4.25, 6.25, 9, 12.75, 故$E\left[e_{1t}\left(e_{1t} - e_{2t}\right)\right] = 1-\delta > 0$, 符合對立假設的要求。

[6]此一設定滿足 GARCH(1,1) 過程爲非負與恆定的要求。

4．2　模擬結果

表1爲 DM, $AR-t_c$ 與 $AR-t_c^*$ 的模擬結果。其中表1-1爲預測誤差來自於 MA($h-1$), 表1-2則是預測誤差同時來自於 MA($h-1$) 與 GARCH(1,1) 的結果。觀察表1-1, 當 $n=256$, DM, $AR-t_c$ 與 $AR-t_c^*$ 三種檢定量型一誤差表現相當, 都接近 0.05 的顯著水準。因爲 $AR-t_c$ 與 DM 皆爲漸近標準常態分配, 因此可以推論 $AR-t_c^*$ 的分配亦然。另一方面, 給定 h, $AR-t_c^*$ 型一誤差會隨 n 增加而有收斂至 0.05 的趨勢。例如, 當 $h=2$ 時, $n=16$, 32, 64, 128 與 256, 其型一誤差分別爲: 0.068, 0.077, 0.07, 0.053 與 0.049。這是 $AR-t_c^*$ 爲漸近標準常態分配的另一項數值證據, 同時也是定理2成立的另一項佐證。

較重要的是, 除了 $h=1$ 的情況以外, $AR-t_c^*$ 型一誤差明顯優於 $AR-t_c$ 與 DM 檢定量。特別是在小樣本與 h 較大時, 前者型一誤差優於後兩者更加明顯 。例如 $n=16$, 當 $h=2$ 時, 這三種檢定量型一誤差分別爲 0.068, 0.337 與 0.123。當 h 增加到 8 時, 型一誤差分別爲 0.066, 0.398 與 0.363。這明顯表示本文所提出的靴帶抽樣程序可以有效改善 $AR-t_c$ 的型一誤差扭曲。整體而言, $AR-t_c^*$ 的型一誤差表現相當穩健, 與 DM 或 $AR-t_c$ 型一誤差變化相當大的情況迥異。且大部分情況又擁有相當或較高的檢力表現。接著觀察表1-2, 一般而言, 與表1-1的情況類似, $AR-t_c^*$ 型一誤差表現優於 DM 與 $AR-t_c$, 特別在小樣本與 h 較大的情況, 這種現象特別明顯。例如, 當 $n=16$, $h=8$ 時, $AR-t_c^*$, DM 與 $AR-t_c$ 型一誤差分別爲: 0.076, 0.415 與 0.394。這顯示 $AR-t_c^*$ 可以有效改善 $AR-t_c$ 型一誤差扭曲。在檢力方面, 其型態與表1-1類似。

另一方面, 表2-1與表2-2爲預測涵蓋檢定的模擬結果。在小樣本時, 如 $n=16$, $AR-t_c^*$ 型一誤差明顯優於 $AR-t_c$ 與 ENC, 隨著 h 增加, 這種情況越明顯。例如: 當 $h=2$ 增加到 $h=8$, $AR-t_c^*$, $AR-t_c$ 與 ENC 的型一誤差分別由 0.078, 0.221 與 0.095 改變成 0.080, 0.246 與 0.219。這表示 $AR-t_c^*$ 可以有效改善 $AR-t_c$ 的型一誤差扭曲, 使之接近 0.05 的顯著水準。在大樣本下, 三者則具有類似的型一誤差表現。另外在 GARCH(1,1) 的設定下, 觀察表2-2, 其型一誤差與檢力的表現型態與表1-1, 2-1

類似, 在此不贅述。

綜合以上所述, $AR-t_c^*$ 型一誤差在大部分情況, 包括小樣本異質性, 其型一誤差的表現相當穩健, 皆接近 0.05 的顯著水準。這與 $AR-t_c$, DM 與 ENC 的表現迥異。這足以顯示 $AR-t_c^*$ 確實可以有效改善 $AR-t_c$ 的型一誤差扭曲, 同時檢力表現又與 $AR-t_c$ 相當。

5 結論

樣本外預測績效的比較, 可幫助研究者驗證經濟理論的正確性並決定適當的模型設定。比較的方式通常有預測準確性檢定, 預測涵蓋性檢定與 $AR-t_c$ 檢定量。雖然 $AR-t_c$ 的檢定程序可以同時用於建立預測準確性檢定與預測涵蓋性檢定, 而且沒有後兩者對核函數不穩健的問題; 但是小樣本下, 與後兩者類似, 皆存在型一誤差扭曲的問題。特別地, 隨往前預測期數增加, 過度型一誤差的現象更嚴重。

在本文中, 我們提出一個過濾靴帶反覆抽樣程序, 用以改善 $AR-t_c$ 嚴重型一誤差扭曲的問題, 稱為 $AR-t_c^*$ 檢定量。我們並證明, $AR-t_c^*$ 與 $AR-t_c$ 皆為漸近標準常態分配。這表示, $AR-t_c^*$ 的靴帶抽樣分配是 $AR-t_c$ 抽樣分配的一致估計, 也同時隱含本文的靴帶抽樣程序正確無誤。另一方面, 由模擬結果顯示, 不管預測誤差在 MA 或條件異質的設定下, $AR-t_c^*$ 皆可以改善 $AR-t_c$ 型一誤差扭曲的問題。尤其是在小樣本與往前預測期數較大時, 這種現象更加明顯。因此我們認為, 在預測績效評估的應用上, $AR-t_c^*$ 是一項不錯的選擇。

參考文獻

叢清全, 李政峰, 郭炳伸 (2003), "預測績效檢定: 簡單迴歸之應用", Working Paper

Akgiray, V. (1989), "Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: evidence and forecasts", *Journal of Business,* 62, 55-80.

An, H.-Z., Z.-G. Chen and E.J. Hannan (1982), "Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation", *Annals of Statistics,* 10, 926-936. Correction: 11, 1018.

Basawa, I. V., A. K. Mallik, W. P. McCormick and R. L. Taylor (1989), "Bootstrapping explosive autoregressive process", *Annals of Statistics,* 17, 1479-1486.

Basawa, I. V., A. K. Mallik, W. P. McCormick and R. L. Taylor (1991a), "Bootstrapping unstable first order autoregressive process", *Annals of Statistics,* 19, 1098-1101.

Basawa, I. V., A. K. Mallik, W. P. McCormick and R. L. Taylor (1991b), "Bootstrapping test of significance and sequential bootstrap estimation for unstable first order autoregressive process", *Commun. Stat. Theory Methods,* 20, 1015-1026.

Berk, K. N. (1974), "Consistent Autoregressive Spectral Estimates", *Annals of Statistics,* 2, 489-502.

Bühlmann, P. (1997), "Sieve Bootstrap for Time Series", *Bernoulli*, 3, 123-148.

Chang, Y. and J.Y. Park (2003) "A Sieve Bootstrap for the Test of A Unit Root", *Journal of Time Series Analysis,* 24, 379-400.

Chong, Y. Y., and Hendry, D. F. (1986), "Econometric Evaluation of Linear Macro-Economic Models," *Review of Economic Studies*, 53, 671-690.

Clements, M. P. and Hendry, D. F. (1993), "On the Limitations of Comparing Mean Square Forecast Errors", *Journal of Forecasting* 12, 617-637.

Diebold, F. X., and Mariano, R. S. (1995), "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 253-263.

Efron, B. (1979), "Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife", *Annals of Statistics,* 7, 1-26.

Engel, C. (1994), "Can the Markov switching model forecast exchange rate?" *Journal of International Economics,* 36, 151-165.

Harvey, D. I., Leybourne, S. J., and Newbold, P. (1997), "Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors," *International Journal of Forecasting*, 13, 281-291.

Harvey, D. I., Leybourne, S. J., and Newbold, P. (1998), "Tests for Forecast Encompassing," *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 254-259.

Horowitz, J. L. (2000), "The Bootstrap," *Handbook of Econometrics,* 5, 3159-3228.

Meese, R. A. and K. Rogoff (1983), "Empirical exchange rate models of the seventies: do they fit out of sample?" *Journal of International Economics,* 14, 3-24.

Nankervis, J. and N. Savin (1996), "The level and power of the bootstrap t test in the AR(1) model with trend", *Journal of Business & Economic Statistics,* 14, 161-168.

Park, J. Y. (2002), "An Invariance Principle for Sieve Botstrap in Time Series", *Econometric Theory,* 18, 469-490.

Shibata, R. (1980), "Asymptotically efficient selection of the order of the model for estimating parameters of a linear process", *Annals of Statistics,* 8, 147-164.

Swanson, N. R. and H. White (1995), "A model-selection approach to assessing the information in the term structure using linear models and artificial neural networks", *Journal of Business & Economic Statistics,* 13, 265-275.

Wu, C. F. J. (1986), "Jackknife, Bootstrap and Other Resampling Methods in Regression Analysis", *The Annals of Statistics,* 14, 1261-1295.

附錄: 數學證明

以下證明, $\|\cdot\|$ 表示歐基里得距離 (Euclidean norm), 給定向量 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]'$, A 爲 $p\times p$ 的矩陣, 定義 $\| x \| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, $\| A \| = \max_x \| Ax \| / \| x \|$。

輔理 1: 在假設1,2成立下, 可得以下結果:

$$(a) \quad E^*|\epsilon_t^*|^2 = \sigma^2 + o(1), \quad a.s.$$

$$(b) \quad E^*|\epsilon_t^*|^4 = O_p(1)$$

證明:

詳見 Chang and Park (2003) Lemma 5與 Lemma 7。

輔理 2: 令 $x_{p,t}^{*'} = [d_{t-1}^*, d_{t-2}^*, \cdots, d_{t-p}^*]$, 其中 d_t^* 由 (12) 式產生。在輔理1的假設條件下,

$$(a) \quad \|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^*\| = O_{p^*}(n^{-1/2}p^{1/2}), \quad a.s.$$

$$(b) \quad \|(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})^{-1}\| = O_{p^*}(1), \quad prob.$$

$$(c) \quad \|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^* \epsilon_t^*\| = O_{p^*}(p^{1/2}), \quad a.s.$$

$$(d) \quad \|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'}\| = O_{p^*}(1), \quad prob.$$

證明 (a):

令 $\bar{d}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} d_{t-j}^*$, $j=1,2,\cdots,p$. 因爲 $d_t^* = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\pi}_{p,k}\epsilon_{t-k}^*$, 利用 Minkowski 不等

式, 可得以下的結果:

$$
\begin{aligned}
E^*|\bar{d}_j|^2 &= n^{-2}E^*|\sum_{t=1}^{n}(\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\pi}_{p,k}\epsilon^*_{t-k})|^2 \\
&\leq n^{-2}(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{\pi}_{p,k}|(E^*|\sum_{t=1}^{n}\epsilon^*_{t-j-k}|^2)^{1/2})^2 \\
&= n^{-2}(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{\pi}_{p,k}|)^2E^*|\sum_{t=1}^{n}\epsilon^*_{t-j-k}|^2 \quad (E1) \\
&= n^{-2}O(1)O(n) \;\; a.s. \quad (E2) \\
&= O(n^{-1}) \;\; a.s \quad (E3)
\end{aligned}
$$

因爲 ϵ^*_t 獨立相同分配且由輔理1(a) 可得:

$$
\begin{aligned}
E^*|\sum_{t=1}^{n}\epsilon^*_{t-j-k}|^2 &= \sum_{t=1}^{n}E^*|\epsilon^*_{t-j-k}|^2 \\
&= nE^*\epsilon^{*2}_t \\
&= O(n) \;\; a.s.
\end{aligned}
$$

另一方面, 由 Park (2002) p.487知 $\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{\pi}_{p,k}| < \infty$, 因此 $(E1)$ 與 $(E2)$ 成立。
由 $(E3)$ 可得 $E^*(n^{-1}\sum_{t=1}^{n}d^*_{t-j})^2 = O(n^{-1}) \;\; a.s.$, 因此 $E^*\|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}x^*_{p,t}\|^2 = O(n^{-1}p) \;\; a.s.$, 亦即 $\|n^{-1}\sum_{t=1}^{n}x^*_{p,t}\| = O_{p^*}(n^{-1/2}p^{1/2})$, 故 (a) 得證。
(b) 與 (c) 詳見 Chang and Park (2003) Lemma 3。

令 $\Gamma^*_{p,p} = (\Gamma^*_{i-j})^p_{i,j=1}$, 其中, $\Gamma^*_k = E^*(d^*_t d^*_{t-k})$。由 Chang and Park (2003) p.398知,

$$
E^*\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x^*_{p,t}x^{*'}_{p,t} - \Gamma^*_{p,p}\|^2 = O_p(n^{-1}p^2)
$$

因爲

$$
\begin{aligned}
|E^*\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x^*_{p,t}x^{*'}_{p,t}\| - E^*\|\Gamma^*_{p,p}\|| &\leq E^*\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x^*_{p,t}x^{*'}_{p,t} - \Gamma^*_{p,p}\| \\
&= O_p(n^{-1/2}p)
\end{aligned}
$$

因爲 $E^*\|\Gamma^*_{p,p}\| = \|\Gamma^*_{p,p}\|$, 只要可證明 $\|\Gamma^*_{p,p}\| = O(1), \;\; a.s.$, (d) 即得證。
令 $f^*(\lambda)$ 與 $f(\lambda)$ 分別表示 d^*_t 與 d_t 的 spectral density。由 Chang and Park (2003) Lemma 6知,

$$
\sup_{\lambda}|f^*(\lambda) - f(\lambda)| = o(1), \quad a.s.
$$

令 λ_n^* 爲 $\|\Gamma_{p,p}^*\|$ 最大的特徵根, 可得以下結果:

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{p,p}^*\| &= \lambda_n^* \\ &\leq 2\pi \sup_{\lambda} f^*(\lambda) \\ &= 2\pi \sup_{\lambda} f(\lambda), \quad a.s. \\ &= O(1), \quad a.s.\end{aligned}$$

上述不等式與最後一個等式詳見 Berk (1974) p.491。故 (d) 得證。

輔理 3: 令 $\hat{\alpha}_p' = [\hat{\alpha}_{p,1}, \hat{\alpha}_{p,2}, \cdots, \hat{\alpha}_{p,p}]$, $\hat{\alpha}_p^{*'} = [\hat{\alpha}_{p,1}^*, \hat{\alpha}_{p,2}^*, \cdots, \hat{\alpha}_{p,p}^*]$, $\hat{\alpha}_{p,i}$ 與 $\hat{\alpha}_{p,i}^*$ 與 $\hat{c}^*$ 分別定義於 (10) 與 (13) 式。$\sigma_n^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n \hat{e}_{p,t}^{*2}$, $\hat{e}_{p,t}^*$ 爲 (13) 式的殘差。在輔理1的條件成立下,

$$(a) \quad \|\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p\| = O_{p^*}(n^{-1/2}p^{1/2}), \quad prob.$$

$$(b) \quad \sqrt{n}\hat{c}^* = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n \epsilon_t^* + o_{p^*}(1), \quad prob.$$

$$(c) \quad \sigma_n^{*2} \xrightarrow{p^*} \sigma^2, \quad prob.$$

證明:

令 A_n^*, B_n^* 與 C_n^* 如下:

$$\begin{aligned}A_n^* &= \sum_{t=1}^n \epsilon_t^* - (\sum_{t=1}^n x_{p,t}^{*'})(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})^{-1}(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* \epsilon_t^*) \\ B_n^* &= n - (\sum_{t=1}^n x_{p,t}^{*'})(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})^{-1}(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^*) \\ C_n^* &= n(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})^{-1}(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* \epsilon_t^*) - (\sum_{t=1}^n x_{p,t}^*)(\sum_{t=1}^n x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})^{-1}(\sum_{t=1}^n \epsilon_t^*)\end{aligned}$$

則可得:

$$\begin{aligned}\hat{c}^* &= \frac{A_n^*}{B_n^*} \\ \hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p &= \frac{C_n^*}{B_n^*}\end{aligned}$$

因爲

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{\sqrt{n}}A_n^* - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^*| &\leq |(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*'})(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}x_{p,t}^{*'})^{-1}(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}\epsilon_t^*)| \\
&\leq \|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*'}\|\|(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}x_{p,t}^{*'})^{-1}\|\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}\epsilon_t^*\| \\
&= O_{p^*}(n^{-1/2}p), \quad prob. \ (E4)
\end{aligned}
$$

利用輔理 2, $(E4)$ 即成立。

同理可得:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}B_n^* &= 1 + O_{p^*}(n^{-1}p), \quad prob. \\
\|\frac{1}{n}C_n^*\| &= O_{p^*}(n^{-1/2}p^{1/2}), \quad prob. \quad (E5)
\end{aligned}
$$

因爲

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p\| &\leq \|n^{-1}C_n^*\||(n^{-1}B_n^*)^{-1}| \\
&= O_{p^*}(n^{-1/2}p^{1/2}), \quad prob. \quad \text{由}(E5)
\end{aligned}
$$

故 (a) 得證。

同理,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\hat{c}^* &= \frac{n^{-1/2}A_n^*}{n^{-1}B_n^*} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^* + o_{p^*}(1), \quad prob.
\end{aligned}
$$

故 (b) 得證。

由 σ_n^{*2} 的定義, 可得以下結果:

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^{*2} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{e}_{p,t}^{*2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\epsilon_t^* - \hat{c}^* - x_{p,t}^{*'}(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p))^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} + \hat{c}^{*2} + (\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)'(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}x_{p,t}^{*'})(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p) \\
&\quad -2\hat{c}^*\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^* - 2\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*'}\epsilon_t^*(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p) + 2\hat{c}^*(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)'\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_{p,t}^{*}
\end{aligned}
$$

由 Park (2002) Lemma 3.2得 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^* \xrightarrow{d^*} N(0,\sigma^2)$, 再利用輔理2可得以下結果:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\hat{c}^* &= O_{p^*}(1), \quad prob. \\
|(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)'(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^* x_{p,t}^{*'})(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)| &= o_{p^*}(1), \quad prob. \\
|\hat{c}^* \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^*| &= O_{p^*}(n^{-1/2}), \quad prob. \\
E^*|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^*| &= O(1), \quad a.s. \quad (\text{因爲由輔理}\,1(\text{a})\ \text{可得} E^*|\epsilon_t^*| = O(1), \ \ a.s.) \\
|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^{*'}\epsilon_t^*(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)| &= O_{p^*}(n^{-1}p), \quad prob. \\
|\hat{c}^*(\hat{\alpha}_p^* - \hat{\alpha}_p)'\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{p,t}^*| &= O_{p^*}(n^{-3/2}p), \quad prob.
\end{aligned}$$

因此可得:

$$\sigma_n^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} + o_{p^*}(1), \quad prob.$$

又因爲

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} - \sigma^2| &\le |\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} - E^*\epsilon_t^{*2}| + |E^*\epsilon_t^{*2} - \sigma^2| \\
&\equiv A + B
\end{aligned}$$

由輔理1(a) 知, $B = |E^*\epsilon_t^{*2} - \sigma^2| = o(1), \ \ a.s.$。另一方面,

$$\begin{aligned}
E^*|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} - E^*\epsilon_t^{*2}|^2 &= n^{-2}E^*|\sum_{t=1}^{n}(\epsilon_t^{*2} - E^*\epsilon_t^{*2})|^2 \\
&= n^{-2}\sum_{t=1}^{n}E^*(\epsilon_t^{*2} - E^*\epsilon_t^{*2})^2 \quad \text{因爲}\epsilon_t^*\text{互相獨立} \\
&= O(\frac{1}{n}), \quad prob. \quad \text{利用輔理}\,1
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
A &= |\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\epsilon_t^{*2} - E^*\epsilon_t^{*2}| \\
&= o_{p^*}(1), \quad prob.
\end{aligned}$$

亦即,

$$\sigma_n^{*2} = \sigma^2 + o_{p^*}(1), \quad prob.$$

故 (c) 得證。

證明定理1:

由輔理3(a) 的證明過程知

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} A_n^* &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t^* + o_{p^*}(1), \quad prob. \\
\frac{1}{n} B_n^* &= 1 + o_{p^*}(1), \quad prob.
\end{aligned}
$$

再利用 $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t^* \xrightarrow{d^*} N(0, \sigma^2)$ (Park, 2002, Lemma 3.2), 與輔理3(c) 可得以下結果:

$$
\begin{aligned}
AR - t_c^* &= \frac{\hat{c}^*}{SE(\hat{c}^*)} \\
&= \frac{\frac{A_n^*}{B_n^*}}{\sigma_n^* (B_n^*)^{-1/2}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} A_n^*}{\sigma_n^* \sqrt{\frac{1}{n} B_n^*}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t^*}{\sigma^2} + o_{p^*}(1), \quad prob. \\
&= N(0, 1), \quad prob.
\end{aligned}
$$

故定理1得證。

表 1-1：預測準確性檢定之小樣本績效比較—MA($h-1$)預測誤差

		$n=16$		$n=32$		$n=64$		$n=128$		$n=256$	
		$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM
$h=1$	大樣本										
	型一誤差	0.349	0.067	0.135	0.059	0.083	0.050	0.068	0.053	0.059	0.048
	檢力	0.076	0.226	0.122	0.178	0.185	0.248	0.209	0.239	0.249	0.277
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.068		0.079		0.083		0.059		0.058	
	檢力	0.119		0.172		0.234		0.245		0.286	
$h=2$	大樣本										
	型一誤差	0.337	0.123	0.129	0.086	0.083	0.070	0.069	0.059	0.058	0.056
	檢力	0.072	0.161	0.117	0.158	0.194	0.229	0.209	0.231	0.247	0.253
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.068		0.077		0.070		0.053		0.049	
	檢力	0.111		0.161		0.219		0.235		0.267	
$h=3$	大樣本										
	型一誤差	0.351	0.177	0.138	0.125	0.083	0.083	0.065	0.063	0.059	0.056
	檢力	0.073	0.133	0.107	0.131	0.189	0.210	0.208	0.217	0.252	0.259
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.070		0.070		0.064		0.063		0.060	
	檢力	0.111		0.154		0.227		0.226		0.275	
$h=4$	大樣本										
	型一誤差	0.360	0.210	0.140	0.148	0.088	0.099	0.069	0.074	0.064	0.060
	檢力	0.071	0.128	0.122	0.118	0.170	0.168	0.196	0.206	0.227	0.236
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.074		0.076		0.084		0.054		0.054	
	檢力	0.121		0.158		0.216		0.222		0.251	
$h=5$	大樣本										
	型一誤差	0.357	0.245	0.139	0.167	0.093	0.113	0.075	0.079	0.065	0.064
	檢力	0.071	0.115	0.120	0.115	0.176	0.152	0.175	0.176	0.216	0.215
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.069		0.083		0.071		0.073		0.063	
	檢力	0.120		0.162		0.197		0.213		0.242	
$h=6$	大樣本										
	型一誤差	0.367	0.270	0.145	0.181	0.100	0.120	0.086	0.089	0.072	0.065
	檢力	0.072	0.101	0.107	0.103	0.167	0.146	0.148	0.156	0.198	0.199
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.072		0.080		0.070		0.062		0.067	
	檢力	0.090		0.143		0.176		0.207		0.208	
$h=7$	大樣本										
	型一誤差	0.393	0.321	0.172	0.206	0.112	0.134	0.090	0.090	0.079	0.065
	檢力	0.065	0.089	0.097	0.093	0.141	0.130	0.149	0.148	0.174	0.178
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.075		0.089		0.074		0.083		0.074	
	檢力	0.105		0.144		0.163		0.181		0.205	
$h=8$	大樣本										
	型一誤差	0.398	0.363	0.177	0.221	0.120	0.143	0.103	0.091	0.089	0.070
	檢力	0.065	0.094	0.090	0.084	0.123	0.113	0.128	0.139	0.148	0.170
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.066		0.101		0.087		0.094		0.069	
	檢力	0.104		0.152		0.180		0.200		0.207	

說明：資料產生過程與符號意義，請參考文章 4.1 節說明。

表 1-2：預測準確性檢定之小樣本績效比較—MA($h-1$)-GARCH(1,1) 預測誤差

		$n=16$		$n=32$		$n=64$		$n=128$		$n=256$	
		$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM
$h=1$	大樣本										
	型一誤差	0.368	0.134	0.147	0.139	0.092	0.141	0.073	0.146	0.062	0.146
	檢力	0.072	0.150	0.093	0.126	0.132	0.156	0.136	0.139	0.151	0.157
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.063		0.079		0.080		0.068		0.064	
	檢力	0.095		0.128		0.165		0.161		0.187	
$h=2$	大樣本										
	型一誤差	0.361	0.148	0.143	0.109	0.089	0.097	0.071	0.089	0.060	0.083
	檢力	0.069	0.118	0.089	0.118	0.134	0.156	0.127	0.145	0.148	0.149
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.065		0.073		0.067		0.061		0.060	
	檢力	0.083		0.115		0.152		0.148		0.172	
$h=3$	大樣本										
	型一誤差	0.374	0.184	0.149	0.127	0.094	0.087	0.071	0.075	0.062	0.068
	檢力	0.061	0.111	0.095	0.110	0.131	0.148	0.130	0.138	0.145	0.159
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.061		0.062		0.067		0.064		0.061	
	檢力	0.098		0.113		0.155		0.164		0.174	
$h=4$	大樣本										
	型一誤差	0.379	0.219	0.154	0.148	0.094	0.096	0.072	0.074	0.061	0.065
	檢力	0.062	0.097	0.094	0.102	0.108	0.127	0.131	0.146	0.140	0.144
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.072		0.077		0.086		0.057		0.055	
	檢力	0.092		0.120		0.158		0.152		0.164	
$h=5$	大樣本										
	型一誤差	0.382	0.257	0.152	0.166	0.101	0.111	0.074	0.077	0.064	0.067
	檢力	0.065	0.096	0.100	0.100	0.112	0.108	0.121	0.122	0.136	0.133
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.072		0.076		0.068		0.071		0.065	
	檢力	0.094		0.127		0.151		0.148		0.155	
$h=6$	大樣本										
	型一誤差	0.389	0.293	0.160	0.188	0.105	0.122	0.083	0.084	0.066	0.067
	檢力	0.067	0.088	0.087	0.083	0.119	0.116	0.107	0.112	0.130	0.139
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.070		0.081		0.077		0.060		0.067	
	檢力	0.089		0.119		0.135		0.146		0.151	
$h=7$	大樣本										
	型一誤差	0.409	0.347	0.179	0.210	0.116	0.131	0.087	0.088	0.070	0.069
	檢力	0.063	0.076	0.084	0.079	0.103	0.109	0.104	0.114	0.120	0.123
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.074		0.080		0.073		0.078		0.073	
	檢力	0.089		0.116		0.134		0.137		0.145	
$h=8$	大樣本										
	型一誤差	0.415	0.394	0.188	0.232	0.129	0.142	0.099	0.092	0.082	0.073
	檢力	0.057	0.082	0.079	0.075	0.096	0.095	0.101	0.110	0.118	0.123
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.076		0.087		0.080		0.092		0.074	
	檢力	0.092		0.133		0.159		0.155		0.160	

說明：資料產生過程與符號意義，請參考文章 4.1 節說明。

表 2-1：預測涵蓋性檢定之小樣本績效比較—MA($h-1$)預測誤差

		$n=16$		$n=32$		$n=64$		$n=128$		$n=256$	
		$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM
$h=1$	大樣本										
	型一誤差	0.217	0.068	0.109	0.061	0.073	0.054	0.061	0.052	0.054	0.051
	檢力	0.136	0.301	0.232	0.331	0.280	0.346	0.324	0.345	0.337	0.345
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.085		0.064		0.055		0.059		0.052	
	檢力	0.222		0.293		0.331		0.328		0.342	
$h=2$	大樣本										
	型一誤差	0.221	0.095	0.105	0.078	0.072	0.064	0.061	0.057	0.057	0.054
	檢力	0.122	0.254	0.224	0.304	0.281	0.328	0.315	0.332	0.323	0.331
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.078		0.076		0.064		0.049		0.061	
	檢力	0.206		0.300		0.339		0.348		0.321	
$h=3$	大樣本										
	型一誤差	0.219	0.117	0.109	0.093	0.073	0.072	0.061	0.061	0.058	0.057
	檢力	0.125	0.221	0.229	0.270	0.283	0.304	0.309	0.320	0.317	0.321
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.077		0.079		0.054		0.060		0.056	
	檢力	0.211		0.286		0.324		0.341		0.327	
$h=4$	大樣本										
	型一誤差	0.221	0.139	0.110	0.106	0.076	0.080	0.063	0.063	0.056	0.053
	檢力	0.120	0.207	0.224	0.250	0.281	0.282	0.297	0.308	0.312	0.326
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.079		0.063		0.064		0.047		0.054	
	檢力	0.202		0.295		0.320		0.297		0.318	
$h=5$	大樣本										
	型一誤差	0.230	0.155	0.111	0.121	0.078	0.090	0.067	0.070	0.062	0.059
	檢力	0.115	0.195	0.218	0.235	0.258	0.271	0.280	0.286	0.289	0.293
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.085		0.080		0.061		0.060		0.051	
	檢力	0.200		0.268		0.304		0.302		0.305	
$h=6$	大樣本										
	型一誤差	0.231	0.177	0.118	0.120	0.082	0.091	0.068	0.068	0.067	0.065
	檢力	0.108	0.184	0.210	0.219	0.240	0.244	0.258	0.269	0.251	0.257
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.074		0.068		0.068		0.062		0.057	
	檢力	0.196		0.258		0.292		0.295		0.286	
$h=7$	大樣本										
	型一誤差	0.238	0.200	0.126	0.141	0.090	0.097	0.074	0.074	0.068	0.062
	檢力	0.116	0.173	0.197	0.192	0.218	0.221	0.243	0.236	0.245	0.244
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.081		0.077		0.080		0.060		0.060	
	檢力	0.187		0.261		0.272		0.285		0.273	
$h=8$	大樣本										
	型一誤差	0.246	0.219	0.138	0.145	0.095	0.101	0.082	0.076	0.079	0.067
	檢力	0.117	0.163	0.182	0.198	0.210	0.210	0.212	0.208	0.215	0.222
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.080		0.082		0.078		0.075		0.071	
	檢力	0.189		0.260		0.278		0.253		0.275	

說明：資料產生過程與符號意義，請參考文章 4.1 節說明。

表 2-2：預測涵蓋性檢定之小樣本績效比較—MA($h-1$)-GARCH(1,1) 預測誤差

		$n=16$		$n=32$		$n=64$		$n=128$		$n=256$	
		$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM	$AR-t_c$	DM
$h=1$	大樣本										
	型一誤差	0.216	0.069	0.106	0.064	0.071	0.055	0.061	0.052	0.053	0.051
	檢力	0.129	0.311	0.233	0.336	0.289	0.346	0.319	0.347	0.332	0.342
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.085		0.065		0.055		0.059		0.050	
	檢力	0.208		0.282		0.336		0.329		0.346	
$h=2$	大樣本										
	型一誤差	0.218	0.091	0.105	0.080	0.071	0.063	0.062	0.057	0.059	0.057
	檢力	0.125	0.267	0.229	0.312	0.290	0.336	0.312	0.338	0.321	0.335
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.067		0.069		0.063		0.053		0.063	
	檢力	0.202		0.300		0.333		0.354		0.330	
$h=3$	大樣本										
	型一誤差	0.220	0.115	0.109	0.093	0.076	0.072	0.060	0.060	0.058	0.058
	檢力	0.123	0.222	0.228	0.274	0.285	0.313	0.615	0.325	0.315	0.323
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.080		0.076		0.058		0.053		0.055	
	檢力	0.194		0.288		0.330		0.344		0.322	
$h=4$	大樣本										
	型一誤差	0.220	0.136	0.110	0.106	0.076	0.081	0.062	0.064	0.057	0.054
	檢力	0.127	0.214	0.216	0.267	0.282	0.288	0.296	0.311	0.311	0.323
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.073		0.065		0.064		0.049		0.050	
	檢力	0.198		0.289		0.312		0.305		0.321	
$h=5$	大樣本										
	型一誤差	0.227	0.155	0.110	0.118	0.078	0.089	0.068	0.070	0.061	0.060
	檢力	0.119	0.203	0.213	0.242	0.268	0.265	0.286	0.287	0.289	0.294
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.078		0.077		0.059		0.059		0.054	
	檢力	0.188		0.274		0.295		0.302		0.313	
$h=6$	大樣本										
	型一誤差	0.228	0.175	0.115	0.127	0.080	0.089	0.068	0.067	0.065	0.066
	檢力	0.119	0.186	0.212	0.218	0.241	0.253	0.263	0.273	0.260	0.258
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.069		0.063		0.073		0.061		0.052	
	檢力	0.181		0.261		0.303		0.293		0.281	
$h=7$	大樣本										
	型一誤差	0.238	0.198	0.122	0.137	0.089	0.096	0.072	0.072	0.067	0.063
	檢力	0.115	0.177	0.202	0.195	0.224	0.227	0.242	0.245	0.243	0.246
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.082		0.077		0.076		0.060		0.056	
	檢力	0.196		0.261		0.273		0.283		0.282	
$h=8$	大樣本										
	型一誤差	0.248	0.216	0.134	0.144	0.094	0.100	0.083	0.077	0.078	0.066
	檢力	0.114	0.158	0.189	0.196	0.212	0.218	0.211	0.211	0.211	0.219
	靴帶反覆抽樣										
	型一誤差	0.080		0.077		0.079		0.071		0.075	
	檢力	0.184		0.244		0.279		0.252		0.279	

說明：資料產生過程與符號意義，請參考文章 4.1 節說明。